UNIVERSITE PARIS DIDEROT (Paris 7)
UFR de Mathématiques

ECOLE DOCTORALE : Savoirs scientifiques :
Epistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

Laboratoire de Didactique André Revuz

DOCTORAT

Spécialité : didactique des mathématiques

Cécile ALLARD

Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.

Thèse dirigée par Denis BUTLEN

Soutenue publiquement le 3 Décembre 2015

JURY

Madame Cécile Ouvrier-Buffet, Présidente

BUTLEN Denis, PR, Université de Cergy Pontoise.	Directeur de Thèse.
HACHE Christophe, MCF, Université de Paris 7.	Examinateur
HERSANT Magali, PR, Université de Nantes.	Rapporteure
MANGIANTE Christine, MCF, Université d'Artois	Examinatrice
MASSELOT Pascale, MCF, Université de Cergy Pontoise	Examinatrice
OUVRIER-BUFFET Cécile, PR, Université de Reims	Examinatrice
ROBERT Aline, PR émérite, Université de Cergy Pontoise.	Examinatrice
SENSEVY Gérard, PR, Université de Rennes.	Rapporteur

Table des matières

TABLE DES MATIERES 3

INTRODUCTION.. 11

PARTIE I 16

CHAPITRE I - INSTITUTIONNALISATION : POINTS D'APPUIS THEORIQUES............... 17

1 ETAT DES LIEUX SUR L'INSTITUTIONNALISATION EN DIDACTIQUE ET EN DEHORS DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES 18
1.1 INSTITUTION, INSTITUTIONNALISER, INSTITUTIONNALISATION : DETOUR ETYMOLOGIQUE. 19
1.2 INSTITUTIONNALISATION ET INSTITUTION EN SCIENCES POLITIQUES ET SOCIOLOGIE DES INSTITUTIONS : DEFINITIONS 19
1.3 INSTITUTIONNALISATION ET INSTITUTION EN PEDAGOGIE INSTITUTIONNELLE 20
1.4 SYNTHESE. 21
2 L'INSTITUTIONNALISATION : DEFINITION ET REFLEXIONS DANS LE CADRE DE LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES. 23
2.1 PRESENTATION RAPIDE DU G.BROUSSEAU, FONDATEUR DE LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES ET DE SON CONTEXTE D'EXERCICE DES ANNEES 1950-1960 23
2.2 INSTITUTIONNALISATION : UNE DEFINITION ET UNE REFLEXION SUR UN FAIT ISSU DES PRATIQUES. 24
2.3 DESCRIPTION DE DEUX DIMENSIONS ET DE DEUX PROCESSUS. 25
2.4 LES PARADOXES RELEVES DANS LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES QUANT A L'INSTITUTIONNALISATION. 27
2.5 SYNTHESE 28
2.6 LA DEPERSONNALISATION COMME CONTRAINTE POUR LA PRODUCTION D'UN SAVOIR. 29
2.6.1 Production de textes et dépersonnalisation du savoir. 29
2.6.2 La personnification du savoir par le maître comme obstacle à la dépersonnalisation du savoir par les élèves.. 30
2.6.3 La textualisation du savoir : son rôle dans la dépersonnalisation. 32
2.7 DES TEXTES DU SAVOIR QUI N'ONT PAS LA MEME EPISTEMOLOGIE. 32
3 ETUDE DE CE QU'IMPLIQUE LA DECONTEXTUALISATION A PROPOS DE L'INSTITUTIONNALISATION. 33
3.1 DECONTEXTUALISATION DANS LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES. 33
3.2 CHOIX DES SITUATIONS. 34
3.3 GESTION DE CLASSE ET ENSEIGNEMENT PAR DES SITUATIONS. 37
3.3.1 Du niveau de formalisation des savoirs, des mots utilisés pour dire, nommer ces savoirs en jeu. .. 37
3.3.2 Synthèse.. 38
3.4 PLACE DE LA CONTEXTUALISATION DANS LA MEMORISATION.. 39
3.4.1 Décontextualisation et conceptualisation pour les psychologues. 39
3.4.2 Conceptualisation du savoir et place du langage. 40
3.5 LA TEXTUALISATION DU SAVOIR. 41
3.6 DES CONDITIONS FAVORABLES A LA DECONTEXTUALISATION. 42
3.6.1 Changement de cadre. 42
3.6.2 Schémas de problèmes : vers une représentation des problèmes. 43
3.7 PROCESSUS D'INSTITUTIONNALISATION ET MEMOIRE DIDACTIQUE DE LA CLASSE. 44
3.8 L'USAGE DU MATERIEL COMME OBSTACLE POTENTIEL A LA DECONTEXTUALISATION 45
3.9 UNE OU DES INSTITUTIONNALISATIONS ?.. 45
3.10 DES INGENIERIES QUI AIDENT A LA CONCEPTUALISATION EN S'APPUYANT SUR L'ECRITURE DE TEXTES. 46
3.10.1 L'institutionnalisation dans les pratiques : 47
3.10.2 Discussion sur le niveau 5.. 47

Précision sur le vocabulaire utilisé. 47
Moments de production 48
3.10.3 EC décontextualisées et EC généralisées 49
3.10.4 Catégorisation des EC et type d'énoncés 49
4 CONCLUSION 51

CHAPITRE II – PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE 54

1 PROBLEMATIQUE 54
1.1 RAPPEL ET ARTICULATION AVEC LE CHAPITRE 1. 54
1.2 HYPOTHESES 56
1.3 ELEMENTS QUI PERMETTENT LA DESCRIPTION DU PROCESSUS L'INSTITUTIONNALISATION. 57
2 METHODOLOGIE. 58
2.1 DE L'ETUDE DU PROCESSUS D'INSTITUTIONNALISATION A L'ETUDE DU PI D'UNE NOTION PRECISE. 58
2.2 UNE METHODOLOGIE EN APPUI SUR DES PREMIERES EXPERIMENTATIONS. 58
2.2.1 Une notion « nouvelle » au regard des programmes induit-elle une exposition écrite de la connaissance ? 59
2.2.2 Un exemple d'expositions de connaissances écrites sur les fractions et les questions que cela soulève. 60
2.2.3 Choix des enseignants 62
2.3 UNE METHODOLOGIE QUI PREND EN COMPTE LES CARACTERISTIQUES DES ENSEIGNANTS : 63
2.3.1 Caractéristiques des candidats suivis 63
2.3.2 Un premier obstacle à notre méthodologie 64
2.3.3 Vulgate pédagogique : la mise en activité : un obstacle pour le recueil de données. 65
2.3.4 Que peut signifier « pratiques expertes » dans la recherche ? 68
2.4 DES RESSOURCES UTILISEES COMMUNES CONSEILLEES EN FORMATION. 69
2.5 COMMENT ETUDIER UN PI DANS LE CAS D'UN ENSEIGNEMENT TRES CONTEXTUALISE. 70
3 LES PROTOCOLES D'OBSERVATIONS ET RECUEIL DE DONNEES. 70
3.1 DES DONNEES DIFFICILES A RECUEILLIR : LA NECESSITE D'ETABLIR UN CONTRAT 70
3.1.1 Les séances filmées. 71
3.1.2 Les cahiers d'exercices. 72
3.1.3 Les recueils de leçons. 72
3.2 DES REGULARITES COMMUNES AUX ENSEIGNANTS SUIVIS 73
3.2.1 Une caractérisation des enseignants en termes de composantes. 73
3.2.2 Un outil pour étudier les déroulements : les proximités-en-acte mises en jeu par les enseignants. 75
4 CONCLUSION. 77

CHAPITRE III - LES FRACTIONS : POINTS D'APPUIS THEORIQUES 79

1 LE CONCEPT DE FRACTION ET SON ENSEIGNEMENT : QUELS ENJEUX ? 79
1.1 APERÇU HISTORIQUE. 80
1.2 ANTIQUITE : LES PREMIERES FRACTIONS. 81
1.3 LES FRACTIONS DANS D'AUTRES CIVILISATIONS DE L'ANTIQUITE ET DU MOYEN-AGE 84
1.4 LES FRACTIONS EN EUROPE AU MOYEN-AGE 85
1.5 LA NAISSANCE DE L'ECRITURE ACTUELLE DES FRACTIONS 85
1.6 DEFINITION MATHEMATIQUE ACTUELLE 87
2 ENSEIGNER LES FRACTIONS 89
2.1 L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS DU COTE CONCEPTUEL. 89
2.2 QUELQUES RESULTATS ISSUS DU PROJET « THE RATIONAL NUMBER PROJECT » 90
2.3 LES DIFFERENTES DIFFICULTES CONCEPTUELLES CONNUES SUR LES FRACTIONS. 92
2.3.1 Grandeur continue, grandeur discrète : des différences de tâches selon les grandeurs. 92
2.3.2 Conservation du tout dans le cas continu 92
2.3.3 Pluralité de l'unité et équivalence des fractions 93
2.3.4 Interprétation relationnelle visant une partie à un tout. 94

2.4 LES DIFFERENTS « ASPECTS » ... 95
2.4.1 Aspect : Partie d'un tout. ... 96
2.4.2 Aspect : Fraction-Mesure ... 96
2.4.3 Aspect : fraction-ratio ... 97
2.4.4 Aspect : fraction-opérateur ... 98
2.4.5 Aspect : fraction-quotient ... 98
2.4.6 Composition de ces « aspects » : ... 99
2.5 LES PROGRAMMES SUCCESSIFS DE L'ECOLE : LES CHOIX D'ENSEIGNEMENTS. ... 99
2.5.1 Les programmes de 1887-1905 ... 99
2.5.2 Les programmes de 1923 et les programmes de 1938 ... 100
2.5.3 Les programmes de 1945 ... 101
2.5.4 Les programmes de 1970 ... 101
2.5.5 Les programmes de 1980 et 1985 ... 102
2.5.6 Les programmes de 1991 ... 102
2.5.7 Les programmes de 2002 ... 102
2.5.8 Les programmes de 4 Avril 2007- 19 juin 2008 ... 103
2.5.9 Synthèse sur les programmes. ... 107
3 CONCLUSION. ... 107

PARTIE II ... 109

CHAPITRE IV – SOLENE : ANALYSE DES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES ECRITES ... 110

1 PRESENTATION DU PROJET GLOBAL ET DE SON CONTEXTE ... 110
2 RESSOURCES CHOISIES PAR LES ENSEIGNANTS. ... 111
3 ELEMENTS DES PROGRAMMATIONS DES DEUX RESSOURCES UTILISEES. ... 112
3.1 PRESENTATION DE L'OUVRAGE ERMEL ... 112
3.2 ERMEL CM1 : DESCRIPTION DE LA PROGRAMMATION PROPOSEE. ... 112
3.3 ERMEL CM2 : DESCRIPTION DE LA PROGRAMMATION PROPOSEE. ... 113
3.4 PRESENTATION DU MANUEL CAP MATH ... 114
3.5 DESCRIPTION DES PROGRAMMATIONS PREVUES PAR CAP MATH. ... 114
3.6 RECAPITULATIF ... 115
3.7 RAPPORT DE SOLENE AVEC SES RESSOURCES ... 115
4 PRESENTATION DE L'ITINERAIRE COGNITIF PROPOSE PAR SOLENE ... 116
4.1 DESCRIPTION DU PROJET D'APPRENTISSAGE. ... 116
4.2 EMPRUNTS ET ARTICULATIONS DES DEUX RESSOURCES. ... 117
4.3 PRESENTATION DU TABLEAU DU PROJET GLOBAL DE SOLENE ET SES EMPRUNTS AUX DEUX RESSOURCES VALABLES SUR TROIS ANNEES. ... 118
4.4 REMARQUES SUR L'ENONCE DES CONSIGNES ET LA VISIBILITE DES ENJEUX DE SAVOIRS. ... 123
5 ANALYSE DES ELEMENTS D'INSTITUTIONNALISATIONS PROPOSES PAR LES RESSOURCES UTILISEES. ... 123
5.1 ANALYSE DES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES PROPOSEES PAR LES RESSOURCES. ... 124
5.2 LES INDICATIONS POUR LES PHASES COMPORTANT DES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES PROPOSEES PAR LES DEUX RESSOURCES. ... 124
5.3 LES INDICATIONS D'INSTITUTIONNALISATION PROPOSEES PAR CAP MATH. ... 129
5.4 REMARQUES AU SUJET DU FASCICULE DICO MATH. ... 131
5.5 SYNTHESE ... 132
6 ETUDE DES PRATIQUES DE SOLENE ... 132
6.1 PARTICULARITE DE LA COMPOSANTE SOCIALE DE SOLENE. ... 132
6.2 UN ITINERAIRE COGNITIF MARQUE PAR UNE SOUPLESSE DU FONCTIONNEMENT DE L'ECOLE. ... 133
6.3 RECONSTITUTION DES SOMMAIRES DE SOLENE. ... 134
6.4 ANALYSE COMPAREE DES SOMMAIRES. ... 138
7 ETUDE DES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES ECRITES SUR LES FRACTIONS. ... 139
7.1 PARTIE A DE LA LEÇON : UNE PROPOSITION DE DEFINITION. ... 141

7.2 PARTIE B DE LA LEÇON : DES EXEMPLES DE LECTURE DE FRACTIONS DITES USUELLES. 142
7.3 PARTIE C : DES EXEMPLES DE LEUR UTILISATION DANS LA VIE COURANTE. 142
7.4 PARTIE D : FRACTIONS ET CALCULS 143
7.5 ANALYSE DES PARTIES MODIFIEES. 144
7.6 UN ESSAI DE PRODUCTION D'EC : ECRIRE UNE REGLE GENERALE DE LECTURE DES NOMBRES RATIONNELS SELON LEURS ECRITURES FRACTIONNAIRES. 147
7.7 COMPARAISON DES EC PRODUITES EN CM2 AVEC UNE CLASSE DE SIXIEME. 148
8 CONCLUSION 149

CHAPITRE V – SOLENE : ANALYSE DES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES ORALES150

1 METHODOLOGIE : PRECISIONS 150
1.1 PRECISIONS SUR LES DONNEES 150
1.2 SPECIFICITE DES EC ETUDIEES DANS NOTRE ETUDE 151
1.2.1 Etude des EC dans le cas d'un enseignement en contexte avec usage d'un matériel. 151
1.2.2 Première comparaison des itinéraires cognitifs 151
1.3 TRAITEMENT DES DONNEES : 153
1.3.1 Découpage en épisodes 153
1.3.2 Les Indicateurs potentiels pour repérer les EC : 154
1.3.3 Les indicateurs des EC de Solène. 154
1.3.4 Des transcriptions au tableau des épisodes. 155
1.3.5 Mise en évidence des EC dans les tableaux des épisodes. 156
2 ANALYSE DES DONNEES. 157
2.1 ANALYSE A PRIORI DE L'ACTIVITE E 158
2.2 TABLEAU DES EPISODES ET MISE EN EVIDENCE DES EXPOSITIONS DES CONNAISSANCES. 160
2.2.1 Tableau des épisodes. 160
2.2.2 Reconstitution des EC de la séance et codage : 166
2.3 ANALYSES DES DONNEES DE LA SEANCE 1 : ANNEE (2). 167
2.3.1 Analyse de la phase de rappel liaison : 167
2.3.2 Analyse de la phase de rappel provoquée 167
2.3.3 Analyse des éléments des EC après la mise en commun. 168
2.3.4 Analyse de l'EC affichée. 168
2.4 ANALYSE A POSTERIORI. 169
2.4.1 Un déroulement proche des recommandations de la ressource. 169
2.4.2 Prise en compte des interventions des élèves et leurs effets. 169
2.5 ANALYSE A PRIORI DE L'ACTIVITE DU MANUEL : ACTIVITE C 170
2.6 TABLEAU DES EPISODES DE LA SEANCE 2 DE L'ANNEE (2). 172
2.6.1 Tableau des EC séance C + EC_1+ EC_2+ EC_3 172
2.6.2 Reconstitution des EC de la séance et codage : 172
2.7 ANALYSE DES DONNEES SEANCE 2 : ANNEE (2). 173
2.7.1 Analyse des EC lors de la phase de rappel. 173
2.7.2 Analyse des EC lors de la lecture commentée de la leçon écrite. 174
2.7.3 Analyse des EC lors de la phase de recherche. 175
2.7.4 Analyse des EC lors de la mise en commun 175
2.7.5 Analyse de la phase de conclusion 176
2.8 ANALYSE A POSTERIORI ET SYNTHESE. 176
2.8.1 Un déroulement et des objectifs qui s'éloignent de celui de la ressource. 176
2.8.2 Des EC discutées prévues et improvisées. 177
2.9 ANALYSE A PRIORI DE LA SEANCE 3 : ACTIVITE G. 178
2.9.1 Reconstitution des EC de la séance 3 et codage. 179
2.10 ANALYSE DES EC SEANCE 3 : ANNEE (2). 180
2.10.1 Analyse des EC dans la phase de rappel 180
2.10.2 Analyse des EC lors de la phase recherche. 180
2.10.3 Analyse des EC lors de la mise en commun 180
2.10.4 Analyse des Ec lors de la phase de conclusion 181

2.11 ANALYSE A POSTERIORI ET SYNTHESE 181
2.11.1 Un déroulement qui s'éloigne de la ressource et ses effets sur les EC. 181
2.11.2 Des EC discutées : au carrefour des difficultés de l'enseignante à formuler des EC et prise en compte du temps d'apprentissage des élèves. 181
2.12 ANALYSE A PRIORI DE LA SEANCE 4 : ACTIVITE H. 182
2.13 RECONSTITUTION DES EC, CODAGE ET ANALYSE DES DONNEES. 183
2.14 ANALYSE A POSTERIORI. 183
2.14.1 Des difficultés liées au matériel 183
2.14.2 Des EC discutées: au carrefour des difficultés de l'enseignante à formuler des EC et prise en compte du temps d'apprentissage des élèves. 183
2.15 DESCRIPTION ET ANALYSE DES DONNEES DES SEANCES QUI SUIVENT SUR L'INTRODUCTION DES FRACTIONS DECIMALES. .. 184
2.15.1 Les EC produites lors de la phase de rappel. 184
2.15.2 Les EC produites lors de la phase de recherche. 185
2.15.3 Phase de rappel de la séance suivante 186
2.15.4 Synthèse 186
2.16 DESCRIPTION ET ANALYSE DES EVALUATIONS. 187
2.17 LA PREMIERE EVALUATION: 187
2.18 LA DEUXIEME EVALUATION : 188
3 CONCLUSION 190

CHAPITRE VI – SOLENE : COMPARAISON DES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES ECRITES ET ORALES 192

1 RECUEIL DE DONNEES ET METHODOLOGIE : RAPPEL ET PRECISIONS 192
1.1 RAPPEL DES DONNEES. 192
1.2 PRECISIONS SUR LA METHODOLOGIE. 193
1.3 RAPPEL DES CARACTERISTIQUES DES ANNEES ET DES CLASSES. 193
1.3.1 L'année (1) : classe de CM1-CM2 193
1.3.2 L'année (2) : classe de CM2 193
1.3.3 L'année (3) : classe de CM1 194
1.3.4 Comparaison et caractéristiques des trois années. 194
2 COMPARAISON DES EC ORALES PRODUITES POUR DES PARTIES A ET B, ANNEES (1) ET (3) 195
2.1 DESCRIPTION ET ANALYSE DE L'ACTIVITE A. 195
2.2 RECONSTITUTION DES EC SUR LE CALCUL MENTAL ET POUR LA PARTIE A ANNEE (1) ET (3) 196
2.2.1 Reconstitution des EC pour le calcul mental et la partie A : année (1). 196
2.2.2 Reconstitution des EC sur le calcul mental et la partie A : année(3) 197
2.2.3 Comparaison et analyse des deux années (1) et (3). 198
2.3 DESCRIPTION ET ELEMENTS D'ANALYSE SUR LA PARTIE B. 200
2.3.1 Reconstitution des EC sur la partie B lors de l'année (1). 202
2.3.2 Reconstitution des EC sur la partie B lors de l'année (3). 202
2.4 COMPARAISON DES EC PRODUITES SUR LES ANNEES (1) ET (3) SUR LA PARTIE B : PHASE DE CONCLUSION 202
2.4.1 Les phases de conclusion : qu'avez-vous appris ? : Du côté des élèves. 203
2.4.2 Qu'avez-vous appris ? : du côté du maître. 204
3 COMPARAISON DES EC ORALES PRODUITES POUR LA PARTIE E, ANNEE (1), (2) ET (3) 205
3.1 COMPARAISON DES EC PRODUITES SUR LES TROIS ANNEES. 205
3.1.1 Comparaison de la passation des consignes. 205
3.1.2 Synthèse sur les variations autour des consignes 208
3.1.3 Variation autour de la validation. 209
3.1.4 Variation autour des conclusions. 210
3.1.5 Synthèse. 212
3.2 VARIATIONS DES EC SUR LA PARTIE E PENDANT TROIS ANNEES CONSECUTIVES. 212
3.2.1 Les EC produites à l'oral lors de la phase de rappel l'année(1) 212
3.2.2 Les EC reconstituées pour l'année (1) 213

Le nombre d'EC est assez limité. Dans le discours alternent des EC générales et des EC s'appuyant sur des exemples. Nous retrouvons cette diversité de désignation de la bande : bande unité, bande de référence, unité de référence. ... 214
3.2.3 Rappel des EC reconstituées pour l'année (2) ... 214
3.2.4 Les EC reconstituées pour l'année(3) ... 215
3.2.5 Synthèse sur la partie E. ... 216
3.3 CONCLUSION ... 216

PARTIE III ... 218

CHAPITRE VII – SASHA : ANALYSE ET COMPARAISON DES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES ECRITES ET ORALES ... 219

1 RAPPEL ET PRESENTATION DES DONNEES. ... 219
1.1 PRESENTATION DES DONNEES ... 219
1.2 PRESENTATION DE SASHA. ... 219
2 ANALYSE DES DONNEES ... 221
2.1 DESCRIPTION DU « CAHIER-MEMOIRE » DE SASHA. ... 221
2.1.1 Les situations repères : description ... 221
2.1.2 Les situations repères de Sasha: des écrits intermédiaires constitutifs du PI. ... 222
2.1.3 Exemple : ... 222
3 ETUDES DES SOMMAIRES SUR TROIS ANNEES. ... 225
3.1 DESCRIPTION GLOBALE DES « CAHIERS-MEMOIRES » DE SASHA. ... 225
3.2 COMPARAISON DES SOMMAIRES ANNEE (1), ANNEE (2) ET ANNEE (4) ... 225
3.2.1 Un PI marqué par des EC écrites nombreuses. ... 226
3.2.2 Un PI marqué par une grande stabilité des contenus enseignés. ... 227
4 ETUDE DES EC ECRITES SUR UNE ANNEE : ANNEE 2014-2015. ... 229
4.1 ANALYSE DE LA LEÇON 1 : COMMENT COMPARER UNE FRACTION A L'UNITE (1) ? ... 229
4.1.1 Partie A : la situation repère ... 229
4.1.2 Partie B : « je retiens » ... 230
4.2 ANALYSE DE LA LEÇON (2) : LES FRACTIONS USUELLES. ... 231
4.2.1 Partie A : situation repère (1) : pliages et découpages pour partager une unité de différentes manières. ... 231
4.2.2 Partie B : situation repère (2) : graduer une droite selon une fraction de l'unité de mesure. ... 232
4.3 ANALYSE DE LA LEÇON (3) : QU'EST CE QU'UN NOMBRE DECIMAL ? ... 233
4.3.1 Partie A : situation repère : comment placer 15/10 et 137/100 ? ... 233
4.3.2 Partie B : « je retiens ». ... 234
4.3.3 Partie C : vers des écritures différentes et la droite graduée. ... 234
4.3.4 Des EC de synthèse sous forme de carte mentale. ... 235
4.3.5 Synthèse. ... 236
5 ETUDE DES EC ORALES SUR DEUX SEANCES. ... 237
5.1 LES DONNEES. ... 237
5.2 DESCRIPTION DU SCENARIO-TYPE D'UNE SEANCE DE SASHA ... 237
5.2.1 Description du canevas global d'une séance ... 237
5.2.2 Synthèse ... 239
5.3 SEANCE SUR L'INTRODUCTION DES FRACTIONS EN CM2 ... 239
5.3.1 Analyse a priori de l'activité. ... 239
5.3.2 Reconstitution des EC orales à partir de la transcription de novembre 2012. ... 239
5.3.3 Analyse a posteriori et synthèse. ... 240
5.4 SEANCE SUR L'INTRODUCTION DES FRACTIONS DECIMALES EN CM2 ... 241
5.4.1 Description de l'activité et éléments d'analyse a priori (voir si pas déjà fait) ERMEL CM2 pp 460 241
5.4.2 Reconstitution des EC orales à partir de la transcription de 2013 ... 241
6 COMPARAISON DES PRATIQUES DE SOLENE ET DE SASHA ... 243
6.1 COMPARAISON D'UNE MEME SEANCE SUR LES FRACTIONS DECIMALES. ... 243

6.1.1 Les EC orales produites lors de la séance sur l'introduction des fractions décimales de Solène. .. 243
6.2 COMPARAISON DES EC ECRITES. 244
7 CONCLUSION 245
7.1 L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS 245
7.2 LES PRATIQUES ET LA MISE EN ŒUVRE DU PI 246

CHAPITRE VIII – GWEN ET JULIEN : ANALYSE ET COMPARAISON DES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES ECRITES ET ORALES. 248

1 RAPPEL ET PRESENTATION DES DONNEES. 248
1.1 PRESENTATION DES ENSEIGNANTS. 248
1.1.1 Recueil des données. 248
2 PRESENTATION DE L'ENSEMBLE DES EC ECRITES DANS LA CLASSE DE GWEN. 250
2.1 DESCRIPTION DES CAHIERS DE LEÇONS DE GWEN. 250
2.2 RECONSTITUTION DES SOMMAIRES ET COMPARAISON. 250
2.3 ANALYSE ET COMPARAISON ENTRE LES DEUX ANNEES. 251
3 ETUDE DES EC ECRITES SUR LES FRACTIONS ANNEE (1) ET ANNEE (3). 253
3.1 L'ANNEE (1). 253
3.2 L'ANNEE (3) 254
3.3 CONCLUSION. 256
4 ANALYSE DE LA SEANCE D'INTRODUCTION SUR LES FRACTIONS : CLASSE DE GWEN. 257
4.1 ELEMENTS D'ANALYSE A PRIORI DE LA SEANCE D'INTRODUCTION DES FRACTIONS. 258
4.1.1 Description et analyse des propositions du guide du maître. 258
4.1.2 Analyse comparée de l'activité du manuel et de l'adaptation faite par le maître. 260
4.2 ANALYSE DES DEROULEMENTS DES DEUX ACTIVITES REALISEES DANS LA CLASSE DE GWEN : 262
4.2.1 Description du déroulement l'activité « cocktail » dans la classe de Gwen. 262
4.2.2 Analyse a priori de l'activité : des tirs au but. 264
4.2.3 Description du déroulement de l'activité « Tir au but » en classe. 266
4.3 ANALYSE A POSTERIORI DES DEUX ACTIVITES ET CONCLUSION. 268
4.4 DESCRIPTION ET ANALYSE DU PI DANS LA CLASSE DE JULIEN. 269
4.4.1 Précisions sur les conditions d'exercice de Julien. 269
4.4.2 Présentation et reconstitution du sommaire du cahier de leçons. 269
4.4.3 Etude de l'itinéraire cognitif proposé dans la classe de Julien. 271
4.5 ETUDES DES EC ECRITES DANS LA CLASSE DE JULIEN. 272
4.5.1 Description et analyse de N_{4} : les fractions(1). 272
4.5.2 Description et analyse de N_{5} : les fractions(2). 273
4.5.3 Description et analyse de N6 : chapitre 3 « placer les fractions sur une ligne graduée ». 275
4.5.4 Description et analyse de N_7 : Simplifier les fractions 275
4.5.5 Description et analyse de N_8 : pour comparer une fraction avec l'unité 276
4.5.6 Description et analyse de N_9 : trouver la partie entière d'une fraction. 277
4.5.7 Conclusion. 278
4.6 DESCRIPTION ET ANALYSE D'UNE SEANCE DE CLASSE. 278
4.6.1 Inscription de la séance dans la programmation. 278
4.6.2 Analyse de la séance. 279
4.6.3 Reconstitution des EC orales. 281
5 CONCLUSION 281

CONCLUSION GENERALE 283

1 DES RESULTATS DU COTE DIDACTIQUE 283
1.1 DES PROPOSITIONS DE PROLONGEMENTS DU CONCEPT D'INSTITUTIONNALISATION. 283
1.2 QUELS MOYENS SONT MIS EN ŒUVRE DANS LES PRATIQUES POUR DECONTEXTUALISER ET DEPERSONNALISER DANS LE CAS DES FRACTIONS ? 285

1.3 DE L'INSTITUTIONNALISATION VERS LES EXPOSITIONS DE CONNAISSANCES. 286
2 UNE INTERROGATION SUR LE TEXTE DU SAVOIR ET L'INSTITUTIONNALISATION : LES EFFETS DE L'ABSENCE DE PRISE EN CHARGE DE TOUS LES ASPECTS DES FRACTIONS DANS LE PROGRAMME FRANÇAIS. 287
3 DES RESULTATS DU COTE DES PRATIQUES. 289
3.1 UN PROCESSUS EN TENSION ENTRE DIMENSION COGNITIVE/SOCIALE 289
3.2 UN PROCESSUS EN CONSTRUCTION DANS LES PRATIQUES 290
3.3 UN PI AU CARREFOUR DE L'INSTALLATION DE LA PAIX SCOLAIRE ET DE L'EXERCICE DE LA VIGILANCE DIDACTIQUE 291
3.4 L'INSTITUTIONNALISATION EST-ELLE ENSEIGNEE EN FORMATION ? 291
4 DIFFICULTES METHODOLOGIQUES ET LIMITES DE LA RECHERCHE 292
5 QUID DES ELEVES ?..294
6 PORTEES ET PERSPECTIVES. 294

BIBLIOGRAPHIE 296

Introduction

Des questions sans réponse : témoignage d'une expérience professionnelle.

Lorsque j'enseignais en primaire, la somme des questions que je me posais était si grande que je pensais ne jamais pouvoir y répondre. J'ai pu apporter de nombreuses réponses, essentiellement celles qui sont en relation avec la gestion de classe comme « *comment obtenir un climat de classe serein ?* », « *quel temps raisonnable à consacrer à ses préparations de classe ?* ». Pour d'autres, j'ai pu y répondre en partie seulement : ce sont les questions sur les élèves à profil particulier ou celles liées à la prise en compte de l'hétérogénéité des classes. D'autres questions sont restées sans réponse, notamment celles en relation avec la construction des traces écrites. Ce terme signifie dans la profession un texte qui sert de références et est souvent destiné à être appris à la maison. Suite à ma formation à l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres, j'avais compris que la trace écrite devait être construite avec les élèves en s'appuyant sur les activités de la classe, qu'elle devait répondre à une question que les élèves (et le maître) s'étaient posée. Mon inexpérience étant en cause, sans doute, je n'avais jamais réussi à réaliser cela. Je ne savais plus ce que j'avais « *le droit* » de dire : pouvais-je présenter un coefficient de proportionnalité ? Pouvais-je même employer ce mot ? Pouvais-je accepter de la part de mes élèves des réponses comme : les multiples c'est quand on peut faire fois, deux ou fois trois, ou fois quelque chose ? Comment pouvais-je définir les multiples en ne m'appuyant que sur la langue maternelle ? Je devais gérer deux contraintes qui semblaient s'opposer : conserver des proximités langagières et enrichir ce qui était dit avec des éléments de savoir (oui mais lesquels ?). Je devais amener petit à petit les élèves à abandonner un certain vocabulaire (passer des « *fois* » à la « *multiplication* »). Mais aussi, plus compliqué encore à faire comprendre, que cette « *égalité* » 3+2=5+7=13 rend bien compte du déroulement de la pensée mais est mathématiquement incorrecte. J'avais le sentiment de négocier le savoir.
Sur deux thèmes particuliers l'écriture des leçons était encore plus problématique : la proportionnalité et les fractions. Pour la proportionnalité, les ouvrages consultés présentaient souvent des tableaux de proportionnalité : cela ne me satisfaisait pas. Pour les fractions, les leçons consistaient à présenter le numérateur et le dénominateur et à l'illustrer par des parts de tartes ou de pizza. Je ne trouvais aucun ouvrage qui m'outillait vraiment.
Je proposais donc des « *leçons* », seul travail autorisé à la maison[1], dans toutes les disciplines. Mais, en mathématiques, il y en avait moins. Les élèves devaient apprendre des leçons, oui mais quelles leçons ? Qu'est-ce que j'avais le droit d'apporter en plus, de dire ?
D'autres questions émergeaient, comme : « *mais comment vont-ils faire au collège, ils n'ont pas l'habitude d'apprendre des mathématiques ?* ». Enfin, tous les ans, j'avais de nouveaux élèves qui me présentaient leurs cahiers des années précédentes, la plupart de temps, il n'y avait aucune trace écrite en mathématique, si bien que je ne savais pas quelle part du programme avait été traitée ou pas.

[1] *Depuis la circulaire du 29 Décembre 1956 .*

J’ai bien conscience qu’une question et une difficulté personnelle n’engagent pas systématiquement à devenir des questions de recherche. Mon mémoire de master (Allard 2010) a été cependant l’occasion de vérifier auprès de professeurs expérimentés que mes questions, au sujet des traces écrites, étaient partagées, de chercher s’ils en avaient d’autres, de déterminer quelles étaient leurs contraintes et éventuellement de voir s’ils avaient trouvé des éléments de réponses à mes questions (en les relatant). Le travail avec mes pairs, soutenu par des lectures en didactique m’a permis de garder ce point de départ et de préciser mes questions de recherche au sujet du Processus d’Institutionnalisation dans les classes de cycle 3, en les inscrivant dans un cadrage théorique partagé.

Position du problème.

La littérature en didactique a d’abord précisé le caractère indispensable de ce que Brousseau (1997) appellera l’institutionnalisation. Ce concept s’affinera pour être présenté comme un processus (Perrin-Glorian 1993a). Brousseau raffinera sa définition en expliquant qu’institutionnaliser c’est décontextualiser et dépersonnaliser les connaissances. Margolinas (2014) explique que le Processus d’Institutionnalisation est associé à ce qui permet la transformation des connaissances (des sujets en situation) en savoir. Le savoir est présenté comme un produit culturel de l'activité scientifique, dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé, formulé, formalisé, validé et mémorisé. Nos recherches s’appuient sur ces définitions générales.
Cependant, dans les définitions que nous avons adoptées pour la classe, nous n’avons pas employé le terme d’institutionnalisation mais préféré celui qui est utilisé dans la profession à savoir « *trace écrite* ». Nous avons vérifié en formation et auprès de plusieurs collègues de primaire : pour eux l’institutionnalisation correspond au mieux à une trace écrite, au pire à prononcer quelques mots à l’oral sur les enjeux de l’activité, ce qui minore ce dont nous voulons parler.
Des didacticiens (Butlen et al 2002, Butlen et al 2012, Coulange 2012, Margolinas & Laparra 2008) ont mis en évidence cette résistance à l’institutionnalisation. Ces auteures avancent que les élèves font des activités dans lesquelles ils font fonctionner des connaissances mais que celles-ci restent trop souvent implicites. Reste à la charge des élèves de distinguer, voire de mémoriser, ce qui est important. Ces connaissances non identifiées, que deviennent-elles ? Comment s’assurer qu’en changeant de contexte, les élèves la reconnaîtront, la nommeront ? Quels sont les moyens, les mises en œuvre possibles pour rendre effectifs les moments d’institutionnalisations (à notre sens) ?
Pour mieux cerner le propos, après avoir précisé nos objets d’étude, en référence à des pratiques que nous connaissons bien, nous allons chercher ce que recouvrent effectivement dans les pratiques des professeurs ces phases de décontextualisation, dépersonnalisation, formalisation et mémorisation du savoir à l’école en fin de cycle 3
Cela nous conduira à préciser le choix d’un niveau de classe, d’une notion et des enseignants observés.
Nous allons expliquer ces choix dans les paragraphes ci-dessous.

Choix du niveau de classe et du thème.

Nous avons mis en évidence dans notre mémoire de master qu’il y avait peu de traces écrites en cycle 2 et cycle 1. Bien que nous ne réduisions pas l’institutionnalisation aux traces écrites, l’absence de ces dernières devient un véritable obstacle pour évaluer les niveaux de

formalisation possible d'un enseignant à un autre. Les raisons mises en avant par les enseignants de cycle 1 sont très pragmatiques, les élèves ne savent pas lire, n'ont pas de leçons à apprendre à la maison : il n'y a pas de traces écrites. Pour autant nous ne pouvons pas dire qu'il n'y a pas d'institutionnalisations.
Pour commencer cet état des lieux de ce qu'est l'institutionnalisation à l'école, nous avons donc fait le choix d'observer des classes de cycle 3. Nous étions assurée qu'institutionnalisations écrites et orales allaient être présentes.
La consultation des différents cahiers de leçons des élèves des classes de plusieurs enseignants (six au début de notre étude) nous a permis de dégager des thèmes communs dont nous retrouvions des écrits, des essais de formulation. En particulier l'enseignement des fractions semblait provoquer une trace écrite chez les six enseignants. Donc nous avons postulé que si les enseignants prenaient du temps pour écrire cette leçon, c'est qu'elle était importante à leurs yeux pour les élèves, qu'ils consacraient du temps à cet enseignement et que cela constituait donc un thème possible. Une deuxième raison motivait le choix d'enseignants expérimentés. Rappelons que le caractère diffus de l'institutionnalisation a été pointé par les auteurs déjà cités. Butlen et al (2012) montrent la difficulté des enseignants débutants à institutionnaliser. Nous nous demandons si cette difficulté est caractéristique des pratiques d'enseignants débutants ou si elle se retrouve dans des pratiques plus expertes.
Notre hypothèse, voire notre conviction est que les enseignants enseignent et exposent des connaissances. Mais, le système de contraintes et d'injonctions institutionnelles auxquels ils sont soumis a des effets sur le Processus d'Institutionnalisation. C'est pourquoi cibler l'étude du Processus d'Institutionnalisation d'une notion devrait nous permettre de décrire ce processus.

Choix des enseignants

Les enseignants débutants sont une population d'enseignants « *nomades* ». Les difficultés pour obtenir un poste à titre définitif sont réelles. Cela renforce le fait que le début de la carrière est souvent consacré à régler des problèmes de gestion, d'enrôlement, à gagner la paix sociale. L'institutionnalisation est peut-être vue par eux comme une question mineure ou qu'on peut gérer autrement que par des écrits personnels (photocopies de documents glanés dans des ressources ou bien sur internet).
Nous nous sommes donc tournée vers des pratiques d'enseignants dont nous étions assurées qu'elles garantissaient la paix sociale. De plus, les élèves de ces classes semblaient adhérer au projet de l'enseignant (paix scolaire, Pezard 2010). Ces enseignants expérimentés, déchargés des questions liées à la gestion de classe, ont des pratiques stables et cohérentes (Robert 2007).
Analyser les pratiques de ces enseignants nous assurait la possibilité de voir se dessiner un Processus d'Institutionnalisation si ce n'est routinisé du moins ayant des régularités que nous pourrions repérer.
Nous avons donc retenu quatre enseignants expérimentés sur les six observés. Nous préciserons davantage ce choix et ses raisons dans le chapitre 2.
Notre étude cible ainsi l'étude du Processus d'Institutionnalisation dans les pratiques d'enseignants expérimentés du cycle 3 pour le cas de l'enseignement des fractions.

Présentation du plan de la thèse.

Nous allons présenter les trois grandes parties de notre travail.

La partie I, constituée de trois chapitres (1,2,3) est consacrée à l'exposition de nos ancrages théoriques, avec un premier état des lieux de ce qu'est l'institutionnalisation en didactique, l'exposition de ce qui pilote précisément notre étude, et un bilan de ce que recouvre le concept de fractions en mathématiques en lien avec l'école primaire. Dans un premier temps (chapitre 1), nous revenons sur le Processus d'Institutionnalisation tel qu'il a pu être défini dans la littérature didactique et nous en proposons des prolongements. Pour cela nous allons caractériser ce qui peut être mis en relation avec les apprentissages dans ce processus et distinguer les « *institutionnalisations* » et les « *moments d'exposition de connaissances* ». Cela nous a conduite à une classification des formes que peut prendre ce processus (en classe), en relation avec l'ensemble du scénario adopté par l'enseignant, qui sera utilisée dans le travail.

Le chapitre 2 expose la problématique et la méthodologie adoptées. Il s'agit d'étudier pour chaque enseignant le processus mis en jeu en classe sur le thème choisi et de dégager les régularités et les variabilités entre enseignants, pour comprendre mieux ce qui peut se jouer à l'école à ce moment-là. Notre projet s'inscrit dans la double approche et les analyses des gestes professionnels de Butlen et al (op.cit) pour l'analyse des pratiques. Nous empruntons à la Théorie des Situations Didactiques les outils didactiques de description des situations proposées en classe L'étude précise menée dans la thèse concerne tous les moments où on peut repérer en classe quelque chose « *qui ressemble à de l'institutionnalisation* » – un des grands problèmes du recueil de données correspondant est qu'il y a beaucoup de tels moments mais qu'ils sont très dispersés, souvent brefs (non repérables sans une attention fine). Une autre difficulté du chercheur est que ces moments peuvent donner lieu à un écrit - mais c'est très rare - ou être seulement oraux, avec tout ce que cela comporte d'imprécisions potentielles, de caractère « *diffus* » et de nécessité de prendre en compte tout le reste pour en comprendre la portée et en apprécier les limites éventuelles. Enfin ces moments sont très variés, notamment en termes de degré de généralité (degré de décontextualisation) et de liens avec les activités précédentes (ou, plus rarement) suivantes des élèves. Il s'agit donc de se donner les moyens de les repérer, quel que soit le moment où ils sont produits et la forme qu'ils prennent, et d'apprécier, grâce à une analyse des déroulements encadrant le moment précis étudié, la proximité (potentielle) entre ces expositions de connaissances et ce qui peut être « *dans la tête* » des élèves, avec éventuellement la perception qu'en a l'enseignant. On conçoit que la méthodologie ne soit pas simple, ni pour le recueil de données ni pour leur analyse. Pour chaque enseignant, cela conduit ainsi à une étude, nécessairement fine, sur le temps long (au moins celui d'une séquence, c'est-à-dire plusieurs séances traitant de la même notion), et même, particularité supplémentaire de notre travail, sur trois ans pour une enseignante, ce qui permet d'apprécier les limites de la stabilité annoncée. Ces particularités de nos données et l'exposition de leur traitement nous ont conduite à organiser nos annexes en deux parties. La première partie de ces annexes concerne les transcriptions organisées année par année pour les quatre enseignants de notre étude. L'autre partie présente le résultat des synthèses et reconstitutions de données réalisées à partir des documents de préparation des enseignants et des nombreux cahiers de leçons et d'exercices en notre possession.

Le chapitre 3 est l'occasion de détailler ce qu'on peut mettre sous le concept de fractions, en particulier à l'école primaire en France, notamment compte tenu des programmes, et en complétant par ce qui est pratiqué à l'étranger. Cela permettra de mieux apprécier les choix des enseignants (et des manuels).

La partie 2 de la thèse (chapitres 4-5-6) est consacrée à l'étude d'une enseignante et cela sur au moins trois ans. Ce temps long nous permet de questionner la stabilité de ses pratiques, en dégageant des variabilités et des régularités intra-individuelles. Le chapitre 4 est ainsi consacré à l'étude des expositions de connaissances écrites visibles dans le cahier de leçons sur trois années. Ces traces écrites nous permettent d'évaluer la proximité de ces écrits avec la situation d'introduction choisie mais aussi les degrés de décontextualisation et de formalisation adoptés. Nous étudions également ces traces écrites au regard des ressources utilisées. Dans quelle mesure l'enseignante s'appuie-t-elle dessus, et pour quelles raisons ?
Le chapitre 5 traque tout ce qui relève des expositions de connaissances réalisées à l'oral sur une année plus particulièrement. Nous allons dans ce chapitre présenter la méthodologie complémentaire spécifique que nous avons mise au point. Nous avons pu recueillir en effet plusieurs films montrant des séances consécutives ce qui nous a permis de reconstituer un texte de savoir construit au fur et à mesure du déroulement des séances. Quelles proximités effectives peut-on repérer, qu'est ce qui guide l'action de l'enseignante ?
Enfin, le chapitre 6 compare les expositions de connaissances de ce professeur pour les mêmes séances mais sur les trois années différentes étudiées. Les variabilités sont parfois surprenantes et les raisons qui expliquent la visibilité (voire l'aboutissement) du Processus d'Institutionnalisation ou leur absence tient parfois à peu de chose… Cela peut-il s'expliquer par la nature essentiellement orale des moments d'exposition des connaissances – qui implique davantage des choix liés à l'adaptation aux élèves qu'au respect d'un texte qui n'est pas là ?

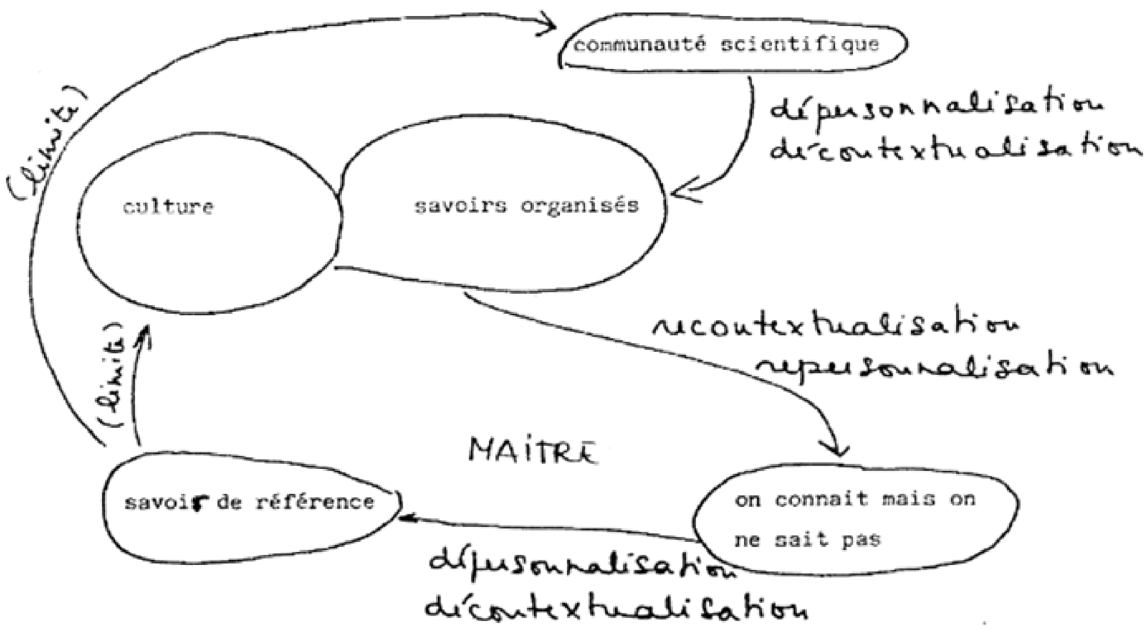
La partie 3 (chapitres 7-8 et conclusion) est consacrée aux autres enseignants de notre étude. Les chapitres 7 et 8 vont conforter certains des résultats de la partie 2 et nous permettre d'en établir d'autres.
Le chapitre 7 présente et décrit un Processus d'Institutionnalisation d'une enseignante experte qui s'appuie systématiquement sur de l'écrit. Ces pratiques sont en rupture avec celles des trois autres enseignants de l'étude. Les données filmées sont plus pauvres pour des raisons que nous évoquerons dans les chapitres 2 et 7 mais nous pouvons quand même ajouter à l'étude des pratiques de cette enseignante sur une année la comparaison des recueils de leçons (sans les déroulements) sur trois années.
Le chapitre 8 expose les pratiques de deux professeurs, moins expérimentés que les deux autres collègues (néanmoins considérés comme experts). L'étude de leurs pratiques est riche d'enseignement sur la construction des gestes professionnels lors de l'institutionnalisation.
Enfin nous terminons par une conclusion générale qui reprend les résultats obtenus du côté des pratiques, de l'enseignement des fractions et de l'institutionnalisation. Nous montrerons ensuite la portée et les limites de notre travail, en dégageant des perspectives de recherche. En particulier il serait utile de creuser dans quelle mesure les ressources outillent les Professeurs des écoles à ces moments – ce qui débouche sur des questions de rédaction des programmes, de documents d'accompagnement et de formation. Mais cela pose aussi des interrogations sur le texte du savoir à l'école primaire, et sur la transition primaire/collège, précisément en lien avec les différences du statut même du savoir « *général* » dans l'enseignement et dans ce qui est attendu des élèves.

Partie I

Chapitre I - Institutionnalisation : points d'appuis théoriques

Notre étude porte sur le Processus d'Institutionnalisation (PI)[2] à l'école primaire. Un processus en informatique est un regroupement d'activités qui interagissent entre elles et transforment des éléments d'entrée en éléments de sortie. Ainsi, décrire un processus c'est s'attacher à définir les acteurs, les moyens et les activités en jeu. L'élément de sortie c'est le savoir ou bien encore le « *livrable* » qui sera montré lors de moments potentiellement privilégiés d'exposition de connaissances. Comme souligné dans l'introduction, nous étudions le Processus[3] d'institutionnalisation dans le cas d'un apprentissage en contexte dont nous étudions également les textes de savoir produits. La production (orale ou écrite) de ce texte du savoir est soumise à de nombreuses contraintes que nous allons définir.

Ce chapitre va permettre de discuter sur le concept d'institutionnalisation. En 1984, lors de la troisième école de la didactique des mathématiques, Brousseau présente l'institutionnalisation comme ce qui transforme une expérience en un *« savoir exportable ».* Il écrit que la didactique *« marche à l'envers de la science »* et illustre cette déclaration avec le schéma suivant. Dans ce schéma, apparaissent les termes de décontextualisation et de dépersonnalisation. C'est là un de nos points de départ et l'objet du chapitre 1 : que signifient dépersonnaliser et décontextualiser dans les pratiques des professeurs des écoles au début du XXI siècle ?
Figure 1 : Brousseau 1984 p4.



La didactique marche à l'envers de la science.

[2] *PI pour Processus d'Institutionnalisation.*

[3] *Nous reviendrons sur le terme de Processus d'Institutionnalisation.*

Le chapitre 1 dans une première partie revient sur l'introduction de ce concept dans la théorie des situations didactiques. Puis nous étudions ce qu'impliquent la prise en charge de la dépersonnalisation et la décontextualisation du savoir dans les pratiques des professeurs. Ainsi nous serons à même dans les chapitres qui suivent de pouvoir décrire et d'analyser ce qui se joue au niveau de l'institutionnalisation dans des classes de professeurs des écoles expérimentés.

1 Etat des lieux sur l'institutionnalisation en didactique et en dehors de la didactique des mathématiques

Avant de développer notre propos sur l'institutionnalisation, il nous semble opportun de distinguer savoir et connaissances. Nous empruntons les définitions écrites par Margolinas :

> « *Le savoir est un produit culturel de l'activité scientifique, dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé, formulé, formalisé, validé et mémorisé. Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, elle vit dans une situation - alors que le savoir vit dans une institution.* » (Margolinas 2014, p.188)

Dans la Théorie des Situations Didactiques, le Processus d'Institutionnalisation désigne ce qu'induit l'exposition des connaissances lors de phases d'institutionnalisation suivant des situations de formulation voire de validation (éventuellement et idéalement après des phases d'action sur une situation liée à un problème adéquat mettant en jeu le savoir, inspiré d'une situation fondamentale).

L'un des effets du PI est la transformation des connaissances en savoir par la reconnaissance de ces connaissances par le maître et les autres élèves. Brousseau explique assez tardivement dans la construction de la Théorie des Situations Didactiques qu'institutionnaliser passe par la dépersonnalisation et la décontextualisation des connaissances en partie mobilisées par les élèves dans les phases antérieures. Le Processus d'Institutionnalisation est alors défini comme le processus permettant le passage de connaissances en savoir. Les conditions favorables à ce passage sont multiples. Elles sont du côté de l'élève qui est prêt à prendre en charge une partie de ses apprentissages en mettant tout en œuvre pour résoudre la situation donnée. Elles sont du côté du maître qui propose des situations qui permettent cette prise en charge. Enfin, elles sont du côté de la confiance qu'a le maître dans les situations et de son diagnostic des connaissances des élèves. Mais elles sont aussi du côté des élèves et de la confiance qu'ils accordent au maître et à son projet.

Nous rappelons que ce chapitre a pour objectif de proposer des définitions et d'établir ce que dépersonnaliser et décontextualiser impliquent dans l'activité du professeur. L'exposition de connaissances est nécessaire pour donner un statut, une légitimité et une permanence aux savoirs. Pour offrir un statut « *officiel* » à ces connaissances, le maître se réfère aux institutions. « *Institutions* » est au pluriel car les expositions de connaissances n'auront pas le même contenu ni les mêmes fonctions selon l'institution de référence. C'est un des objectifs de notre thèse, pointer les assujettissements à ce qui peut être considéré comme des institutions (la classe, les centres de formation -IUFM, ESPE-, les Directions

Académiques) et en étudier les effets. Les questions autour de la légitimité et de la permanence des savoirs traversent toute notre étude.
Pour mieux définir les sens que nous donnons à dépersonnalisation et décontextualisation, nous allons emprunter et transposer des définitions provenant d'autres champs disciplinaires que la didactique des mathématiques. En effet, le concept d'institutionnalisation en didactique des mathématiques apparaît dans un contexte intellectuel assez riche après les années 1960. Selon Weil-Barais (2005) c'est dans les années 60 que la psychologie cognitive émerge. Cyrulnik (2014) montre aussi que c'est la période où la psychiatrie devient une science et sort les malades des asiles en les soignant par la parole et certaines molécules. Enfin c'est aussi la naissance de la « *pédagogie institutionnelle* » portée par Oury avec le regard de Lacan : psychanalyste.
Notons que ce concept est aussi développé dans différentes disciplines un peu avant qu'il ne soit développé en didactique des mathématiques. L'origine du mot « *institutionnaliser* » semble remonter à 1956 en sciences politiques d'après des dictionnaires étymologiques.
Enfin, pour conclure sur ce rapide rappel de certains éléments du contexte des années 60, c'est aussi à cette période que Guy Brousseau, avant de fonder la Théorie des Situations Didactiques devient instituteur.

1.1 Institution, institutionnaliser, institutionnalisation : détour étymologique.

Les dictionnaires étymologiques[4] recensent l'apparition première des mots en langue française. Le mot institution est polysémique et a trois sens :
- À la fin du XII^{ème} siècle, il signifie ce qui est institué, la règle. La définition est complétée en 1790 et définit« *l'ensemble des structures fondamentales d'organisation sociale* » (Moniteur Universel III p 91)
- En 1537, il prend le sens d' « *action d'instituer quelqu'un en une situation* »
- En 1552 pour Rabelais l'institution devient le synonyme d' « *éducation* » mais aussi du lieu d'éducation (1680).

La polysémie du mot complexifie son interprétation tout en l'enrichissant, les liens entre les trois sens ne s'opposent pas et sont assez proches. Ces définitions montrent que l'institution peut être un lieu ou une organisation sociale qui fixe des règles.

1.2 institutionnalisation et institution en sciences politiques et sociologie des institutions : définitions

Une des origines du concept d'**institutionnalisation** est du côté du domaine des sciences politiques. Il apparaît dans la lecture anglo-saxonne à la fin du dix-neuvième siècle. D'après le dictionnaire étymologique en ligne (CNRTL) et le dictionnaire Larousse le Lexis (1989), ce mot date de 1956. Le premier usage revient à Burdeau[5](1956) dans « *La démocratie* ». Il sert à décrire comment l'institutionnalisation du pouvoir est l'opération juridique par laquelle le pouvoir politique est transféré de la personne des gouvernants à une entité abstraite. L'effet

[4] *D'après la base de données étymologique du Centre Nationale de Ressources Textuelles et Lexicales[4].*

[5] *http://www.cnrtl.fr/definition/institutionnalisation*

juridique de cette opération, c'est la création de l'Etat comme support du pouvoir indépendant de la personne des gouvernants d'une part et la distinction entre le pouvoir et les individus qui en exercent les facultés d'autre part.
Ce que nous retenons dans cette définition c'est que l'institutionnalisation est un processus consistant à la dépersonnalisation du pouvoir dont les hommes sont des représentants. Ils restent alors des représentants du pouvoir sans incarner celui-ci. Ce sont les lois et plus largement l'acte juridique qui permettent ce transfert.
Cinquante ans plus tard, l'étude de ce processus en sociologie des institutions se poursuit. C'est ainsi que Tournay chercheuse au CNRS en sciences politiques écrit qu'institution et institutionnalisation sont des synonymes :

> *« Le mot vient du latin, instituo- instuere qui renvoie à la contraction du mot in statuo signifiant « placer dans », « installer », « établir ». La notion d'institution fait donc référence à une idée du mouvement précédant une situation et tendant vers un équilibre plutôt qu'à la consolidation durablement acquise d'un ensemble d'activités. La signification de ce terme vaut alors pour redondance de l'idée d'appréhender l'institution dans son acception étymologique, c'est-à-dire comme un processus tendant momentanément vers une plus grande stabilisation des pratiques et des normes, ne retirant cependant rien à sa complexité heuristique. »*
> (Tournay 2011, p.3)

Ce que nous retenons c'est que l'émergence d'une institution relève étymologiquement d'un processus qui vise un équilibre qui serait toutefois en mouvement puisque le Processus d'Institutionnalisation n'aboutit jamais complètement. Il augmente juste l'équilibre. Tournay (op.cit) ajoute qu' « *ainsi la grande majorité des cadres d'analyse évite de définir précisément où commence et où finit l'institution. C'est un concept flexible.* »
La description de ce qu'est l'institutionnalisation en sociologie des institutions induit un processus et une dépersonnalisation (en sciences politiques). Le Processus d'Institutionnalisation est un concept flexible. La dépersonnalisation permet une mise à distance et une création de normes indispensables pour la création et l'existence d'une institution.

1.3 institutionnalisation et institution en pédagogie institutionnelle

Notre passé d'enseignante du premier degré, nous avait fait rencontrer ces notions, non pas en formation, mais sur le terrain car nous avions fait nos premiers pas dans des classes fonctionnant selon les principes de la pédagogie institutionnelle décrite par F. Oury dans une pédagogie institutionnelle (1967). L'école est une institution dans le sens de Rabelais (1552) et de Richelet (1680) : c'est un lieu d'éducation.
En pédagogie ces mots sont utilisés par les fondateurs de la pédagogie institutionnelle (1958)[6] : mouvement pédagogique qui s'est développé en se fondant sur certains principes de la pédagogie Freinet. Cette pédagogie se développe autour de trois axes que précisent Vasquez, Oury (1974)

[6] *F. Oury est instituteur. Anne Vasquez est psychologue. Jean Oury est psychiatre et psychanalyste et Lacan est psychanalyste.*

> *« Nous estimons que l'étude du milieu éducatif comporte nécessairement trois dimensions au moins :*
> *• Matérialiste : le matériel, les techniques qui commandent les types d'organisation déterminent les activités, les situations, les relations ;*
> *• Sociologique : la classe (groupe et ensemble de groupes), fait partie d'autres ensembles qui la déterminent en partie ;*
> *• Psychanalytique : reconnu ou nié, l'inconscient est dans la classe et parle... Mieux vaut l'entendre que le subir. »*

Fernand Oury et son frère Jean Oury, psychiatres psychanalystes proches de Lacan, définissent la classe institutionnelle. Ils précisent également qu'«*institutionnel*» étant un terme assez polysémique ils ajoutent « *qu'il n'est pas à prendre ici dans le sens «d'établi» mais dans une perspective dynamique, en une formulation qui a quelque proximité avec la proposition de Castoriadis lorsqu'il distinguait «l'institué» de «l'instituant»* ». (Oury et al, 1998 p.246)
Autrement dit, il s'agit de «*l'institution de systèmes de médiation dans lesquels les personnes ne sont plus simplement face à face, mais parlent de quelque chose qui existe et œuvrent sur quelque chose qui existe en dehors d'eux et dont ils sont responsables*.».
Enfin, et même si c'est ici trop rapidement dit, il peut être intéressant de garder à l'esprit que le terme «*institutionnalisation*» est un raccourci ne rendant compte que d'une seule dimension, alors que le travail institutionnel véritable ne peut se faire que dans un mouvement qui vise à articuler «*institutionnalisation*» et «*désinstitutionnalisation*»[7]...
Ils décrivent un processus du « *pas à pas* » qui peut se réaliser grâce aux espaces d'échanges autour d'un même objet « *les systèmes de médiation* ». Les personnes échangent et se sentent responsables de l'objet d'étude. Les fondateurs de la pédagogie institutionnelle expliquent que les 4L (Lois Limites Lieux et Langage) sont les bases de leur mouvement. Etudier l'institutionnalisation à l'école conduit à prendre en compte le matériel à disposition, les groupes d'élèves et les spécificités des individus.
Cette présentation rapide de la pédagogie institutionnelle, et de la sociologie, nous permet de dire que l'institutionnalisation est un concept reconnu dans plusieurs disciplines. L'institutionnalisation décrit bien une équilibration entre des individus et des connaissances, c'est un processus par définition qui modifie l'état d'une connaissance. L'institutionnalisation des connaissances conduit à donner un statut officiel, partagé à ces connaissances.

1.4 Synthèse.

La polysémie des mots institutions et institutionnalisations nous conduit à penser que les contraintes du maître liées à l'institutionnalisation seront aussi variées que ces mots sont polysémiques. Les contraintes seront liées au lieu d'exercice et aux institutions dont relève le professeur.
Que ce soit en sciences politiques, en sociologie de l'éducation, en sociologie des institutions, les mots institutions, institutionnalisations sont communs. Ce sont les appuis

[7] *http://pig.asso.free.fr/LePIG.htm*

théoriques et les objets d'études qui changent. Dans ces sciences, le Processus d'Institutionnalisation conduit à un « *livrable* », en didactiques des mathématiques ce « *livrable* » est potentiellement une exposition de connaissances. Joigneaux, Margolinas & Laparra (2012) livrent leurs réflexions sur les frontières entre les disciplines :

> *« On pourrait dire que la psychologie s'intéresse principalement aux connaissances alors que certains aspects de la sociologie sont plutôt centrés sur les conditions institutionnelles de production des savoirs. La didactique des mathématiques quant à elle s'intéresse à la circulation entre les savoirs et les connaissances, ce qui contribue à faire bouger les frontières des disciplines. Tout projet d'enseignement s'appuie en effet sur une volonté sociale de transmettre des savoirs et de développer des connaissances. Ce sont les savoirs, accumulés dans la culture et légitimés par des institutions, qui constituent la part officielle des curricula. Néanmoins, ce que la société attend de l'école, ce n'est pas que les jeunes adultes sortis de l'école soient capables de restituer le texte des savoirs, mais aussi qu'ils soient capables d'investir des connaissances pertinentes dans les situations qu'ils vont rencontrer au cours de leur vie ».* (Joigneaux, Margolinas, Laparra 2012, p. 10)

Dans cet extrait apparaissent déjà les tensions entre deux dimensions, l'une qui serait du côté du domaine publique et l'autre du côté du domaine privé. L'école existe en s'appuyant sur une volonté sociale d'éduquer et de transmettre à des individus. L'un de ces objectifs est de garantir l'insertion de ces individus dans la société.
L'école est un lieu où au moins deux institutions cohabitent. La première est celle que nous nommons « *Education nationale* ». Cette institution vit dans plusieurs lieux : des lieux de décisions (ministères) et des lieux qui pilotent les décisions telles les directions académiques ou les inspections de circonscription. Cette institution vit aussi dans des lieux où ces décisions sont appliquées telle que l'école, puis la classe. L'enseignant est un représentant de cette institution, il exerce selon des contraintes qui donnent des limites à son exercice. Les deuxièmes institutions sont celles plus lointaines qui valident les connaissances à transmettre. Les professeurs des écoles ont parfois une formation disciplinaire (lettres modernes, anglais…) parfois une formation plus générale (licence en sciences de l'éducation). Notons que depuis la masterisation les profils des jeunes enseignants sont encore plus variés, certains ayant exercé un autre métier. La distance et la familiarité avec le savoir à enseigner ne sont pas les mêmes selon le parcours universitaire du PE. C'est ainsi que certains PE ont une formation en mathématique qui s'est arrêtée aux premières années du lycée tandis que d'autres sortent de grandes écoles d'ingénieurs.
Cette plus ou moins grande distance dans le temps aux contenus mathématiques et le plus ou moins bon rapport aux mathématiques peuvent être des contraintes pour certains professeurs des écoles. Un professeur des écoles est un représentant de l'institution, il est à ce titre garant des contenus d'enseignement. Peut-il assurer de garantir le contenu des 10 disciplines qu'il enseigne ? Nous ne le croyons pas. Ce qui conduit à se demander quelle est la part des responsabilités des différentes institutions pour garantir cela.
Le professeur des écoles est soumis à l'assujettissement de plusieurs institutions. Les institutions tendent à normaliser des comportements et des contenus. Ainsi un enseignant doit respecter les injonctions institutionnelles, doit s'assujettir autant que possible aux normes de son établissement, aux normes de la profession en partie construites lors des

formations initiales et continues. Il est soumis à un système de contraintes à la fois du côté du contenu des enseignements et du côté des attendus des institutions dont il dépend. Il n'est pas libre d'enseigner un contenu mais a des marges de manœuvres quant à ses choix pédagogiques. Il est nécessaire de souligner que ses choix pédagogiques sont orientés par ce qu'il a vécu en formation initiale ou en formation continue. Un professeur peut tenter de reproduire un modèle pédagogique rencontré en formation ou réagir contre. Ses contraintes sont aussi du côté de son lieu d'exercice (qui peut être vu comme une institution). En effet, enseigner en maternelle, en primaire, en Zep, en cours double, au collège ou au lycée implique des normes culturelles, sociales et des contenus différents.
Le paragraphe suivant va nous permettre d'exposer les premiers points d'appuis théoriques pour tenter de définir les contours de l'institutionnalisation à l'école.

2 L'institutionnalisation : définition et réflexions dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques.

Nous avons jugé nécessaire de présenter les premières utilisations de ces mots dans d'autres contextes (sociologie et pédagogie institutionnelle) émergeant à la période où Brousseau était jeune enseignant. Les frontières entre psychologie, sociologie et didactiques sont parfois assez minces et parfois une notion d'une discipline percole sur une autre. Nous avons eu besoin de redonner un contexte (historique et culturel) à ce concept que nous étudions pour mieux l'appréhender.

2.1 Présentation rapide du G.Brousseau, fondateur de la Théorie des Situations Didactiques et de son contexte d'exercice des années 1950-1960

Guy Brousseau[8], a été instituteur de 1953 à 1962, puis il a poursuivi ses études et obtenu une licence en mathématiques et en sciences de l'éducation. Il obtiendra un doctorat es sciences en mathématiques en 1987. Il exerce dans une période de l'histoire marquée par l'apparition de nouveaux modèles d'apprentissage en rupture avec le modèle transmissif. C'est aussi à cette période qu'émerge la psychologie cognitive.
Les travaux de J.Piaget sur l'apprentissage mathématique ont marqué la réflexion de Brousseau. Cependant il rappelle que sa position n'est pas celle des psychologues bien qu'il utilise certains résultats de leurs travaux sur les processus d'apprentissages, sur le raisonnement, la modélisation, puis plus tardivement sur la mémorisation. Brousseau explique que la didactique des mathématiques étudie en premier lieu les enjeux de la transposition didactique et les conditions nécessaires et suffisantes pour que les élèves apprennent par les situations.
La didactique ne s'intéresse pas aux mécanismes d'apprentissage d'un sujet en particulier. La didactique est amenée à produire des situations qui permettent au sujet d'apprendre dans un milieu le plus a-didactique possible. Une connaissance solide des mathématiques est nécessaire pour construire de telles situations. Ces dernières permettent la construction

[8] *Voir site http://guy-brousseau.com/biographie/carriere/*

d'objets mathématiques. Brousseau (1987) explique l'importance de positionner l'élève face aux mêmes difficultés qu'ont connues les chercheurs en mathématiques.
Historiquement, la Théorie des Situations Didactiques[9] s'est d'abord focalisée sur cette recherche de situations a-didactiques permettant un apprentissage constructiviste avant d'étudier le « *rôle* » du maître. Dans la Théorie des Situations Didactiques, celle qui tient le premier rôle c'est la situation. C'est cette situation bien construite qui facilite la dévolution et l'émergence dans l'action d'une nouvelle connaissance. Le maître, en classe, a un second rôle. En effet « *le passeur de connaissances* » n'est pas l'unique maître mais l'action (au sens intellectuel) du sujet qui permet de résoudre une situation en s'appuyant sur ses connaissances. C'est la situation qui est un catalyseur de construction des connaissances.
Les fondations de la théorie des situations s'ancrent sur des travaux en psychologie cognitive. Elle étudie les conditions favorables pour favoriser l'émergence des savoirs mathématiques et des connaissances liées. Savoir et connaissances ont plusieurs définitions possibles selon les théories adoptées. Nous empruntons celles proposées par la Théorie des Situations Didactiques. Ainsi, le savoir constitué est décontextualisé et dépersonnalisé. Il est rédigé avec des intentions de présentation d'énoncés formels. Les connaissances sont produites dans l'action, elles sont introduites en contexte dans des situations choisies par le maître. Elles sont par nature contextualisées et personnalisées.
La didactique s'intéresse en premier lieu au passage du savoir à enseigner aux savoirs enseignés et à la transformation des connaissances en savoir.

2.2 Institutionnalisation : une définition et une réflexion sur un fait issu des pratiques.

Les concepts de dévolution et d'institutionnalisation n'étaient pas encore formulés en 1981. Ces concepts sont apparus à partir de 1982 et en 1986 à l'occasion d'exposés aux écoles d'été de didactique des mathématiques. Ces concepts étaient en germe (Brousseau 1998).
Ainsi, Brousseau (1997) explique les raisons pour lesquelles le concept de « *l'institutionnalisation* » est apparu seulement après avoir posé les bases de la Théorie des Situations Didactiques, et un peu malgré lui. Brousseau dégage deux raisons essentielles à cette découverte tardive. L'une est attachée à la conviction que les apprentissages mathématiques pouvaient se réaliser « *naturellement* », c'est-à-dire sans intention didactique forte, puisque le sujet était capable, d'après Piaget, de construire ses propres connaissances en situation. L'autre raison est attachée aux préoccupations premières de Brousseau : la construction de situation a-didactique. Pour appuyer notre propos nous rappelons cette citation de Brousseau :

> *« peut-être parce que les travaux de Piaget montraient qu'il existe des processus naturels de développement des connaissances et laissèrent espérer que chaque notion mathématique possèderait une sorte d'épistémologie naturelle ou spontanée, peut-être aussi parce que j'ai pu imaginer de nombreuses situations « autodidactiques » et provoquer des apprentissages constructivistes, j'ai commis l'erreur de croire en la possibilité d'une didactique « constructiviste », les faits d'abord, puis bientôt des raisonnements sur lesquels nous reviendrons ont*

[9] Théorie des Situations Didactiques utilisé ainsi pour remplacer Théorie des Situations Didactiques.

> *montré la vanité de cet espoir et la nécessité de phases d'institutionnalisation qui donnent à certaines connaissances le statut culturel indispensable de savoir. De même que les théorèmes en actes s'évanouissent bientôt en l'absence de formulation et de preuves, les connaissances privées et même publiques restent contextualisées et vont disparaitre dans le flot des souvenirs quotidiens si elles ne sont pas replacées dans un répertoire spécial dont la culture et la société affirment l'importance et l'usage. »* (Brousseau 1997, p.9)

Brousseau rappelle l'importance de mettre en commun, de partager les connaissances pour que celles-ci puissent avoir l'occasion de passer du statut de connaissances privées au statut de savoir à conserver en mémoire - entre autres pour des raisons culturelles —. Tant que les connaissances restent privées, elles restent personnelles. L'enjeu de l'institutionnalisation est de donner un statut social, collectif à une connaissance liée à une situation dans un contexte et dans un lieu donnés. C'est aussi accepter l'hypothèse que l'élève peut construire son savoir par une adaptation personnelle a-didactique est fondée mais n'est pas suffisante. Des apports de la part des professeurs ont semblé indispensables aux professeurs suivis dans le cadre des recherches menées par Brousseau. Nous postulons également que des apports sont indispensables.

2.3 Description de deux dimensions et de deux processus.

Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'interroger l'institutionnalisation c'est aussi questionner deux processus dans deux dimensions différentes. Nous avons évoqué ces deux dimensions (publique et privée), nous pouvons maintenant les décrire un peu mieux ainsi que les deux processus qui leur sont associés.
Le premier processus est lié aux apprentissages, il va consister à passer du particulier, présenté parfois en contexte vers le général. Ce processus permet de résoudre et de reconnaitre les problèmes liés au savoir en jeu quels que soient les cadres (au sens de Douady). Le deuxième processus, bien que lié aux apprentissages est plutôt du côté « *social* ». Ce deuxième processus permet de donner un statut officiel, une culture commune aux élèves d'une même classe d'âge.
Brousseau (1988) explique alors que

> *« Les situations a-didactiques sont des situations d'apprentissages dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaitre sa volonté, ses interventions en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève veut faire, ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître. Nous avons fabriqué des situations a-didactiques de toutes sortes, le maître était là pour faire fonctionner la machine, mais, sur la connaissance elle-même ses interventions étaient pratiquement annulées, nous avions là des situations d'apprentissage –au sens des psychologues- et on pouvait penser que nous avions réduit l'apprentissage à des successions d'apprentissages. »* (Brousseau 1988, p.19)

Brousseau (op.cit) ajoute que malgré les situations, les maitres observés continuaient à avoir besoin de

> *« prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et ce qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux évènements de la*

> *classe, comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. L'enseignant devait constater ce que les élèves devaient faire (et refaire) ou non avaient appris ou avaient à apprendre. Cette activité est incontournable : on ne peut pas réduire l'enseignement à l'organisation d'apprentissages. La prise en compte officielle par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître, de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'institutionnalisation »*[10] (Brousseau 1988, p.19)

Brousseau exprime clairement la nécessité d'une double reconnaissance (du côté de l'élève et du côté du collectif).
Nous posons alors l'existence d'une dimension sociale de l'apprentissage et d'une dimension cognitive que traverse le Processus d'Institutionnalisation. Cette dimension cognitive prend en compte le sujet et sa capacité à intérioriser les connaissances, à les transformer et à échanger sur les connaissances en jeu pour mieux les approprier. Cette dimension est interne au sujet, plus personnelle. Nous postulons donc que l'élève est un sujet cognitif qui se construit aussi en co construction avec les autres (d'où la nécessité de la dimension sociale).
Du côté des élèves, l'apprentissage ne peut se réduire à une succession de tâches et du côté du maître son activité[11] ne peut se réduire à la présentation et à l'organisation de situations. Margolinas (2012) souligne également « *si les connaissances ne restent que des modèles implicites d'action, elles ne pourront pas faire fonction de référence, elles restent fragiles et fugitives […] l'étude de la didactique se situe dans cette circulation entre connaissance et savoir.* ». Comme le souligne Brousseau c'est le rôle du maître que de trouver des moyens didactiques pour favoriser le passage des connaissances en savoir. Certains des éléments du décor dans lequel il joue son rôle sont choisis, d'autres non (tels les programmes à suivre, son lieu de travail..). C'est bien là l'un des enjeux de notre travail d'identifier dans les pratiques ces moyens didactiques pour favoriser ce passage. Nous nous demandons si le rôle du maître consiste seulement à cela. Quels sont les apports possibles de l'enseignante ? Y a-t-il des raisons d'apporter ce qui n'a pas été révélé lors de la situation et à l'issue de la recherche ? Les réponses à ces questions pour mieux comprendre le rôle du maître restent à définir.
Institutionnaliser d'après Brousseau revient à prendre en compte voire à négocier avec les 4 paradoxes qu'il a déterminés. Nous allons les présenter et les interpréter dans les paragraphes suivants.

---

[10] *Souligné par nous*

[11] *Au sens large du mot, c'est-à-dire comprend tout ce que le maître doit faire, produire, organiser pour exercer son métier.*

2.4 *<u>Les paradoxes relevés dans la Théorie des Situations Didactiques quant à l'institutionnalisation.</u>*

Lors d'un cours donné pendant une école d'Eté (1984) Brousseau rappelle que les enjeux de la Théorie des Situations Didactiques sont d'abord de trouver des situations qui permettent l'émergence des connaissances. Ce texte liste les différentes manifestations du savoir selon la situation. Ainsi, Brousseau explique qu'une situation d'action fait évoluer l'élève vers un changement de point de vue. Il ajoute qu'une situation de formulation fait évoluer vers un changement de code, de langage et qu'une situation de preuve fait évoluer l'élève vers un changement de théorie qui permet de produire des théorèmes. Brousseau (1984) relève aussi les paradoxes liés à l'institutionnalisation.

Dans la Théorie des Situations Didactiques, les situations sont souvent présentées comme des jeux (dans le sens de jouer) qui peuvent masquer que leur fonction n'est pas le plaisir de jouer mais l'apprentissage. Le **premier paradoxe** apparait alors : comment un élève peut-il avoir conscience qu'il a appris s'il a réussi à résoudre (à gagner) le problème posé ? S'il a gagné, il peut penser qu'il savait déjà. Ce paradoxe est celui de l'apprentissage par adaptation, la question que soulève Brousseau (1986) est celle de la consistance de la construction du savoir par une adaptation personnelle a-didactique. Des réflexions sur cette interrogation, l'amèneront à avancer la nécessité de la « *négociation du savoir* » ainsi.

> *« Il faut donc que quelqu'un d'extérieur vienne pointer ses activités et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel. Cette institutionnalisation est en fait une transformation complète de la situation […] Ce travail culturel et historique diffère totalement de ce qui semblait devoir être laissé à la charge de l'élève et il revient à l'enseignant »* (Brousseau 1986, p.71)

Quelles vont être alors les marges de manœuvres pour réussir cette négociation ? Sous quelle forme cette négociation est-elle possible ? L'enseignant détient l'objet de la négociation. La force du contrat didactique suffit-elle pour que l'objet de ce savoir soit assez attrayant pour provoquer une réelle négociation ? Le maître semble souvent devoir rester en retrait. Il ne dit pas le savoir, il le fait vivre. Il ne dit pas mais il négocie. Tous les savoirs sont-ils négociables ? Ou plus largement, quel contenu mathématique est-il négociable ? Est-ce envisageable de penser qu'on puisse négocier le contenu d'un texte de savoir, du vocabulaire mathématique ? Ce qui nous semble raisonnablement négociable c'est la reconnaissance de certaines connaissances au profit d'autres. Mais alors qu'en est-il des élèves qui ont mis en fonctionnement des connaissances qui ne suffisent pas pour trouver une solution à la situation ?

D'après Brousseau, l'institutionnalisation permet de résoudre ce paradoxe dans le sens où <u>l'institutionnalisation rend explicite la connaissance en jeu.</u>
Le deuxième paradoxe est constitutif de l'enseignement. L'élève doit accepter de prendre en charge la résolution du problème car il y aura à gagner une nouvelle connaissance. Nous comprenons ainsi ce paradoxe que nous reformulons : Le maître quant à lui, ne doit rien dévoiler et conduire à accepter les termes de ce contrat : « *je connais la réponse mais je ne la donne pas, je dois donc mettre les élèves dans une telle situation qu'ils aient envie, besoin de trouver la solution* <u>». Ainsi l'institutionnalisation permet la réconciliation des élèves et du</u>

maître, ces derniers disent ce qu'ils pensent avoir appris, le maître reformule si besoin et donne une place à l'expression et à la reconnaissance des connaissances de ses élèves.
Pour expliquer le **troisième paradoxe**, Brousseau compare le travail de l'enseignant à celui d'un acteur et d'un metteur en scène. Le maître ne vit pas le savoir dans le sens qu'il sait ce qu'il y a en jeu, il met en scène la situation…Et pourtant malgré toutes ces précautions : ne pas dévoiler le savoir en jeu, faire celui qui ne sait pas, choisir une situation qui motive qui favorise la dévolution ne suffit pas. Du côté de l'élève, sa position est constamment en déséquilibre, ce qu'il savait avant n'est pas suffisant, il doit apprendre de nouveau.
Nous comprenons alors que l'institutionnalisation serait un moyen d'ancrer l'ancien dans le nouveau, l'institutionnalisation serait un moyen d'accompagner ce déséquilibre permanent dans lequel l'enseignant place l'élève.
Enfin, Brousseau nous présente le **quatrième paradoxe** qui l'amènera à dire que la didactique fonctionne à l'envers de la science. La science propose des textes dans lesquels les savoirs sont organisés décontextualisés (voire dépersonnalisés).
Les situations proposent un contexte, permettent le fonctionnement de connaissances. Les élèves apprennent par adaptations successives à ces contextes. Comment faire pour qu'ils en extraient le concept, comment faire pour que cette construction du savoir en contexte puisse déboucher sur des savoirs généraux, unificateurs?
L'institutionnalisation serait un moyen pour dépasser le cas particulier de l'apprentissage en contexte et proposer un savoir de référence plus universel, un savoir transférable d'une classe à une autre, pas seulement attaché à un contexte et à une personne (le sujet ou celle du professeur).

2.5 Synthèse

Les quatre paradoxes de l'institutionnalisation nous permettent de nouveau de dégager les différentes dimensions de l'institutionnalisation que nous allons définir. L'une est une dimension d'ordre social, échanger autour du savoir en jeu augmente l'équilibre entre les élèves et les élèves et le maître. Ces expositions du savoir permettent de montrer aux élèves qu'ils ont des savoirs communs. De plus ces échanges diminuent la différence entre ce qui est su par les élèves et ce qui est su par le maître.
L'autre dimension est plus orientée vers l'apprenant et son système cognitif. Bien que nous n'ayons pas accès à ce que les élèves intériorisent, nous regardons les conditions offertes par le professeur pour que le sujet (élève) puisse mémoriser, intérioriser les concepts.
Nous appellerons :
Dimension sociale : correspond à la dimension du Processus d'Institutionnalisation (PI) qui va permettre de mettre sur la place publique le savoir en jeu, de s'accorder entre les différents interlocuteurs puis d'identifier le savoir en jeu en référence au savoir « *savant* », s'accorder sur la généralisation. En effet, avoir les mêmes références, c'est nécessaire pour communiquer, c'est utile pour faire partie de la société.
Dimension cognitive : correspond à la dimension du (PI) qui va permettre d'ancrer, faire les liens entre les connaissances anciennes et nouvelles et de dépasser le particulier pour aller vers une généralisation pour un sujet. Institutionnaliser est utile pour la construction des apprentissages et plus précisément est une étape pour la construction de concepts.

2.6 La dépersonnalisation comme contrainte pour la production d'un savoir.

2.6.1 Production de textes et dépersonnalisation du savoir.

Chevallard (1991) rappelle que l'objet d'étude de la Didactique c'est le système didactique, système composé d'enseignants, d'élèves et de savoirs mathématiques.
Chevallard (op.cit) explique que dès la constitution d'un savoir savant, le chercheur se heurte à une contrainte : celle de la dépersonnalisation. Pour rendre possible cette dépersonnalisation, le savant sera amené à produire des textes et à faire « *la publicité de ce nouveau savoir* ».

> *« Il en est ainsi, en particulier, de la contrainte de dépersonnalisation, à laquelle on n'a sans doute pas accordé toute l'attention qu'elle mérite. Tout savoir pris in statu nascendi est attaché à son producteur, et fait pour ainsi dire corps avec lui. Son partage, à l'intérieur même de la communauté savante suppose un certain degré de dépersonnalisation, qui seul permet la publicité de savoir.*[12] *On oublie trop, par exemple, que ce que nous appelons aujourd'hui la mécanique classique fut d'abord le savoir personnel, quasiment ésotérique, d'Isaac Newton […] Sans doute le processus de dépersonnalisation n'est-il jamais si achevé qu'avec le temps de l'enseignement (« vous pouvez me croire car ce n'est pas de moi »). Mais il commence bel et bien dans la cité savante. »* (Chevallard 1991, p.21)

À l'école, cette dépersonnalisation est un peu de la même nature dans le sens où les connaissances du sujet doivent être partagées avec leurs pairs de manière à ce que chacun montre l'état de son nouveau savoir et établisse ainsi qu'il est commun avec les autres. Discuter sur une situation, et ce qu'elle a apporté oblige à une dépersonnalisation. Pour que cette dépersonnalisation soit complète, il y a également une autre nécessité à prendre en compte : celle du temps de l'enseignement. Si d'autres que celui qui a produit le nouveau savoir s'en emparent et le diffusent, le savoir alors se détache de son producteur. Souvent, en didactique, le travail du chercheur en mathématique est interrogé pour dégager ce qui est (au moins dans les attitudes) transférable pour le travail de l'élève. Ainsi la posture privilégiée, est celle du chercheur face à un nouveau problème dont personne ne connaît la solution. Le chercheur en mathématique va utiliser toutes ses connaissances anciennes pour essayer de répondre aux questions posées par le problème. Le maître en proposant une situation nouvelle aux élèves, les met dans la même position. Mais, contrairement au chercheur, l'élève est face à un enseignant qui détient la réponse à la question. Le travail du chercheur, s'il trouve une solution ou une partie de la solution est d'exposer ce nouveau savoir, qu'il essaiera de décontextualiser et de dépersonnaliser.
La transposition didactique du savoir peut apparaître comme une succession de transformations du savoir savant au savoir enseigné en passant par le savoir à enseigner. L'un des rôles du maître est d'essayer entre autres de trouver la juste distance entre les formulations savantes et des formulations retravaillées en fonction d'un ensemble de contraintes (comme l'âge des élèves, les programmes, la notion en jeu…)

[12] *Souligné par nous.*

Nous retenons que dans l'enseignement scolaire, la dépersonnalisation du savoir a deux facettes. L'une qui est propre à l'élève : il doit accepter d'abandonner ses propres théories ou apprendre du vocabulaire plus mathématique (comme l'usage du mot « *sommet* » à la place du mot « *coin* »). L'autre facette est plus didactique dans le sens où c'est l'action du professeur qui va conduire à la dépersonnalisation, il la favorise en organisant sa classe de manière à générer des discussions entre pairs, copiant, en partie seulement le fonctionnement des sociétés savantes.
Dans notre étude nous allons examiner comment les enseignants prennent ou non en charge ces deux facettes de la dépersonnalisation.

2.6.2 La personnification du savoir par le maître comme obstacle à la dépersonnalisation du savoir par les élèves

Exemple 1 : illustration de la difficulté d'énoncer une règle dépersonnalisée par le professeur.
Pour illustrer l'autre facette de la dépersonnalisation c'est-à-dire celle qui détache le sujet de ce qu'il énonce. Pour cela, nous allons nous appuyer sur une séance d'une des enseignantes que nous avons suivie.
Solène, PEMF, introduit l'enseignement des fractions en utilisant des bandes de rouleau de caisse enregistreuse. Lors de cette première séance, elle demande aux élèves de produire trois quarts d'une bande qu'elle a distribuée. Ces élèves de CM1 sont familiarisés depuis le CE1 à trouver le quart d'un nombre entier pair dont la procédure usuelle est expliquée « *comme prendre la moitié de la moitié* ». L'enseignante nomme la bande unité de référence, « ***ma** bande à **moi*** » ou « ***ma** bande* ». Elle interpelle les élèves en utilisant très souvent des pronoms personnels à la première personne du singulier : « ***ENS** : donc ça veut dire, là Timéo…une moitié comment **je** vais écrire une moitié, **je** vais noter un demi* [13]». L'enseignante illustre au tableau ce qu'elle vient de dire et institutionnalise l'écriture $\frac{1}{2}$.
Ces formulations laissent entendre que l'enseignante choisit un matériel bien particulier « *ma bande* » et d'écrire « *à sa façon* » un demi $\frac{1}{2}$ alors que cette écriture est universelle. Ce que nous retenons également de cet exemple, c'est que les institutionnalisations orales produites souvent dans un dialogue (enseignant-élèves) sont personnifiées, attachées à la personne du professeur. Dans la suite de notre étude, nous nous interrogerons sur la place de cette personnification du savoir et essaierons d'en analyser les effets sur les élèves.
Notre deuxième exemple montre que pour les élèves le processus qui détache un savoir de son locuteur ne va pas de soi.
Exemple 2 : quand un changement d'enseignant signifie un changement de savoir.
L'exemple traité ci-dessous illustre une difficulté d'enseignement que nous avons rencontrée[14]. Nos élèves de CM1 avaient appris à poser des multiplications à trois chiffres par des nombres à deux chiffres. Dans les produits partiels ne figuraient pas les zéros dus au décalage des changements de rang des unités. Ces élèves-là, n'arrivaient pas non plus à calculer de tête certaines multiplications car ne savaient pas décomposer 12x24 en (24x10) + (24x2), ils faisaient tous (24x1) +(24x2). En CM1 ils n'avaient pas compris (en acte) le principe de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication et leurs connaissances en

[13] *Transcription*

[14] *Nous avons vécu cette séance en 2008 dans une classe dont nous étions le professeur.*

numération étaient faibles. De plus dans le cas où le multiplicande comportait des zéros, les élèves écrivaient des lignes de zéros mais continuaient à marquer le décalage dans la somme des produits partiels par un point. Nous avons voulu résoudre ce problème et pour cela imposer d'écrire sur le côté de la multiplication posée les produits partiels en ligne (en suivant ainsi les préconisations des Instructions officielles de 2002), en faisant figurer les zéros.

```
  324              324 x45 = (…x…) + ( …x…)
 X45
  → 324x5
  → 324x 40
---------
```

À la fin de la séance, nous attendions que les élèves nous disent qu'ils avaient compris qu'il était inutile de faire des lignes de zéros et que le zéro dans les produits partiels remplaçait fort avantageusement le point. Ce ne fut pas compris ainsi…

Une élève déclara qu'elle venait d'apprendre à faire une multiplication à la manière de la nouvelle maitresse. « *On a appris à faire une multiplication à la manière de la maîtresse* »[15], sous-entendu la maîtresse de cette année.

Un travail long d'entrainement et de justification a été réalisé pour que cette nouvelle présentation révèle son intérêt (par rapport aux propriétés de la multiplication) et ne soit pas vue comme une « *nouvelle* » présentation mais l'occasion d'acquérir de nouvelles connaissances mathématiques. Une aide inattendue est arrivée peu de temps après. Les anciens élèves de CM2 sont venus nous voir un soir et ont affirmé que les professeurs de mathématiques du collège n'utilisaient pas les points et préféraient les zéros. La validation et la reconnaissance de cette méthode validée par d'autres élèves d'un autre lieu de l'institution (le collège), ont permis l'acceptation et l'institutionnalisation. La validité de cette technique a été rendue possible grâce à :

-l'interaction entre élèves provenant de deux lieux de la même institution.

- la permanence d'une exposition de savoir d'un lieu d'une institution à une autre.

Notons que sans l'intervention des élèves, le projet de l'enseignant n'obtenait pas l'adhésion. Remarquons toutefois que la permanence d'un savoir dépend aussi de l'usage de ce savoir.

La dépersonnalisation du savoir, pour nous, relève aussi d'un processus qui touche les élèves mais aussi les pratiques des enseignants. Les élèves doivent comprendre que les nouvelles connaissances sont communes et partagées par tous les élèves de leur âge et que ce savoir nouveau n'est pas attaché à un professeur particulier. Il est important de rappeler que le professeur des écoles passe une année et 26 heures par semaine avec ses élèves. Les rapports entre un enseignant et des élèves peuvent alors être forts.

Le professeur a donc un rôle ambivalent. D'une part il doit institutionnaliser et faire la publicité de ce nouveau savoir, ce que l'élève ne peut faire tout seul. Mais d'autre part le jeu « *d'institutionnaliser* » devra être suffisamment subtil pour que le savoir ne soit pas attaché à sa personne, savoir dont il n'est pas le créateur (contrairement au savant).

Enfin, les représentants de l'institution ont intérêt, pour légitimer un savoir d'assurer parfois les permanences symboliques (utiliser un langage commun au moins écrit) et cognitive (s'assurer des connaissances mathématiques et didactiques) du savoir en jeu. De plus, la

---

[15] *Propos recueillis dans le cadre d'un devoir de master 2, UE didactiques comparées, cours donné et devoir corrigé par Alain Mercier.*

temporalisation (mise à distance du savoir dans le temps) mais aussi la mise à distance de celui qui énonce le savoir sont aussi des conditions pour favoriser ces permanences.
L'assurance de ces permanences contribue à la dépersonnalisation du savoir

2.6.3 La textualisation du savoir : son rôle dans la dépersonnalisation.

Nous ne sommes pas novateurs en déclarant que pour assurer la diffusion et la permanence d'un savoir, il faut s'appuyer sur des textes. La permanence dépend aussi de l'usage de ce savoir. Peu d'entre nous essaie actuellement d'extraire des racines carrées, sans calculatrice, les connaissances et gestes techniques se sont perdus au profit d'autres.
Chevallard (1991) expose l'importance de ce texte du savoir (qui peut être un texte oral) qui est l'outil essentiel du professeur. Chevallard affirme que les autres variables sont des subordonnées et permettent surtout d'organiser la mise en œuvre de son arme première, le texte du savoir. C'est ce texte, « *qui fait seul exister l'enseignant comme tel, et qui est en même temps l'instrument thérapeutique principal. Puisque c'est par lui que l'enseignant agit pour enseigner, qu'il agira pour modifier les effets de l'enseignement.* ». (Chevallard 1991, p21).
Ce qui contribue à la légitimation de ce savoir c'est la production de textes par l'enseignant. Nous rajoutons que produire un texte peut participer davantage à la diffusion. De plus l'écriture d'un texte permet le désengagement de l'action de son auteur (et conduit vers la décontextualisation et la dépersonnalisation) et un accès différé pour les lecteurs. Dire un texte peut engager la discussion, parfois à la diffusion dans l'instantanéité contrairement au texte écrit.

2.7 Des textes du savoir qui n'ont pas la même épistémologie.

Dans la classe, contrairement au chercheur, l'élève est face à un enseignant qui détient la réponse à la question. Le travail de chercheur, s'il trouve la solution est ensuite d'exposer ce nouveau savoir, qu'il essaiera de décontextualiser et de dépersonnaliser. Pour cela, il sera amené à élaborer un texte qui lui permettra de diffuser le fruit de son travail. Cette diffusion (par des publications, des communications) conduira à des discussions entre pairs. Cette discussion participera à la validation des résultats.
L'élève, quant à lui, n'a pas à convaincre de ses découvertes puisqu'il sait que son enseignant est garant de ce qui est enseigné. L'élève peut produire des éléments du texte du savoir, mais c'est essentiellement au maître de produire de tels textes. Il y a là une différence fondamentale avec le travail du chercheur. Le chercheur produit son texte ce qui correspond à une première dépersonnalisation. Ce texte est le résultat de questions qu'il s'est posées et dont la réponse n'existait pas. L'élève quant à lui, peut produire un texte mais celui-ci ne sera pas le texte qu'il devra apprendre. Son texte est le fruit d'une question qu'il ne s'est pas posée mais à laquelle il a plus ou moins accepté de répondre. De plus, il est possible qu'il n'ait pas les moyens de répondre à la question.
Le texte retenu sera celui du maître. Ce texte prendra ou non des éléments des textes produits par les élèves, des éléments de contenus en référence au programme et à la discipline enseignée. Il est possible que le texte proposé établisse des proximités avec les productions des élèves. Il est possible aussi que pour construire ce texte l'enseignant se soit appuyé sur un autre texte issu d'une ressource. Le texte du savoir écrit proposé par le maître

répond à des contraintes institutionnelles, à la prise en compte ou non de la parole des élèves. Ce texte peut être une reconstruction d'un texte trouvé dans une ressource (manuels, ressource en ligne) et une reconstruction des propres connaissances en mathématiques du professeur. Ce texte du savoir peut aussi être soumis aux croyances du professeur comme « *compléter un texte à trous permet aux élèves de rester attentifs.* ». Ce texte peut donc avoir des formes différentes (manuscrit par l'élève, rédigé et photocopié par le maître, en partie rédigé par le maître et comportant des parties où l'élève écrit). Ces textes selon le maître, selon l'école où il exerce peuvent être compilés dans un cahier, un classeur, collés sur des feuilles de couleur. Les recueils ainsi constitués peuvent alors passer d'une classe à une autre, d'un enseignant à un autre. La dépersonnalisation se fait donc à plusieurs niveaux, celui de l'élève, du maître, de l'école (s'il y a présence d'un recueil de textes de référence).

Ces textes de savoir ne produiront pas les mêmes institutionnalisations selon que le texte est oral ou écrit. Nous émettons l'hypothèse que les institutionnalisations réalisées à l'oral, éventuellement lors de phases de rappel (Perrin-Glorian 1993b), lors des situations de formulation n'ont pas les mêmes effets ni les mêmes fonctions qu'un texte écrit.
Pour nous, ces textes qui diffusent le savoir ne sont pas soumis aux mêmes contraintes selon le lieu de l'institution dont ils relèvent (classe du premier degré, classe du second degré). Ils ne peuvent pas répondre aux mêmes exigences de rigueur et de formalisation selon qu'ils sont produits par un professeur des écoles polyvalent (soumis à certaines contraintes et non spécialiste de la discipline) qui s'adresse à de jeunes élèves ou par un spécialiste de la discipline (un professeur de mathématiques soumis à d'autres contraintes).
Nous nous demandons, pour le professeur polyvalent, sur quels documents peut-il s'appuyer pour produire ces textes de savoir? Comment le PE articule-t-il ses connaissances didactiques et ses connaissances mathématiques pour produire de tels textes ? Quelle est la place dans ses pratiques des différentes ressources utilisées ? Comment ces ressources outillent-elles le maître quant à l'élaboration de textes ?
La Théorie des Situations Didactiques envisageait dans un premier temps la dépersonnalisation comme le processus permettant que les connaissances du sujet ne soient pas attachées à un sujet. Nous émettons l'hypothèse que cette dépersonnalisation se joue aussi au niveau de l'enseignant. Nous appelons cette facette de « *personnification* » Nous nous demandons ce que dépersonnaliser et « *dépersonnifier* » impliquent dans l'activité du professeur ?
Nous pensons que la production de textes de savoir écrits plutôt qu'oraux soit un des moyens d'atteindre la dépersonnalisation et la dépersonnification du savoir.

3 Etude de ce qu'implique la décontextualisation à propos de l'institutionnalisation.

3.1 Décontextualisation dans la Théorie des Situations Didactiques.

La décontextualisation du savoir est une facette de l'institutionnalisation. Nous rappelons que le professeur a un double rôle. Tout d'abord, rendre accessibles les savoirs qu'il veut enseigner en mettant en scène des situations où ils peuvent se manifester par des actions

décidées par les élèves (contextualisation), c'est alors l'enjeu de la dévolution. À l'inverse, extraire des actions des élèves celles qui sont conformes : c'est la décontextualisation qui est la deuxième facette de l'institutionnalisation. Brousseau confronte également, pour expliquer la nécessité de la décontextualisation, l'activité du chercheur et celle du professeur. Le chercheur pour faciliter ses communications réorganise, dépersonnalise (le plus possible) décontextualise. L'enseignant fait le travail inverse en proposant des situations qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner. Donner du sens aux connaissances est une des activités les plus subtiles du professeur et est corrélé au choix de la situation.
Enfin, la nécessité de décontextualiser peut être vue comme la conséquence d'un apprentissage en « *contexte* » : les élèves sont amenés à trouver des solutions dans l'action dans un contexte donné.
Les questions liées à la décontextualisation interrogent le système didactique à plusieurs niveaux :
- sur le choix des situations plus ou moins a-didactiques qui n'engageront pas les mêmes contraintes de gestion. Nous détaillons ce point dans le paragraphe suivant.
- sur l'articulation des différentes situations
- sur le niveau de formalisation et de généralisation des savoirs

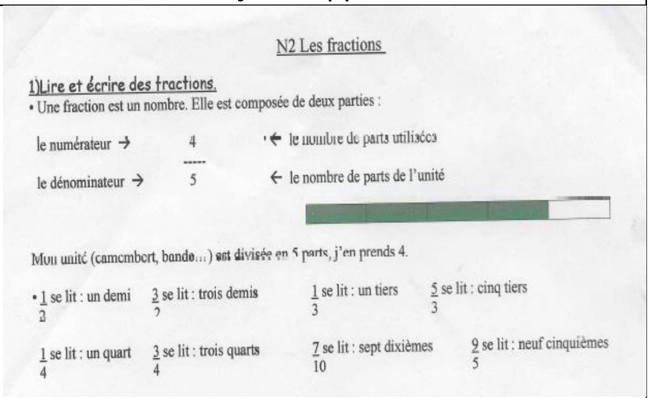
Le système didactique peut aussi être interrogé sur les jeux[16] de décontextualisation-contextualisation dans leur rôle sur la mémorisation des textes par les élèves. L'un des aspects de la contextualisation que nous n'avons pas encore évoqué est le rôle qu'elle joue comme soutien de la mémoire des élèves. Le rappel d'un contexte favorise la mobilisation des connaissances d'une manière parfois plus économique que la lecture d'un texte décontextualisé. C'est alors que l'on peut parler de processus de contextualisation-décontextualisation-recontextualisation : le maître propose une situation pour laquelle les connaissances sont utilisées en contexte, puis décontextualise (afin de favoriser l'émergence du savoir) puis re-contextualise (pour la mobilisation des connaissances afin de résoudre une nouvelle situation) en évoquant la situation et non les connaissances en jeu.

3.2 Choix des situations.

En 2014, les manuels qui proposent des situations transposées des situations créées par les didacticiens sont nombreux. Institutionnellement, il a été recommandé d'introduire des apprentissages par des problèmes dits d'apprentissage (Bulletin Officiel, 2002). La résolution de problèmes doit faire partie de l'activité centrale de l'élève (Bulletin Officiel de 2002 repris en 2008). Les mots situations-problèmes, problèmes d'apprentissage, situation découverte, situation de recherche sont utilisés souvent sans aucune distinction apparente et semblent être synonymes « *d'activité introduction d'une nouvelle notion* ». Nous utiliserons le terme d' « *activités introductives* » qui présente l'avantage d'avoir pour nous un sens plus large englobant toutes les autres activités et ne les plaçant finalement dans aucune théorie didactique.
Pour que ces activités jouent leur rôle, le professeur devra savoir les choisir et identifier leurs potentialités d'a-didacticités. Pour illustrer notre propos, nous allons utiliser un exemple de l'impact du choix de l'activité sur les institutionnalisations.

[16] *Le mot jeu est utilisé dans le sens relation, lien.*

Lors de nos pré-expérimentations, nous avons filmé un jeune enseignant préparant l'examen du CAFIPEMF.[17] Gwen[18], qui enseigne depuis 5 ans en CM2 (il a 5 ans d'ancienneté). Nous avons filmé la première séance qu'il propose sur les fractions et récupéré toutes les activités réalisées sur les cahiers ainsi que toutes les traces destinées à être apprises à la maison, que nous appellerons désormais leçons. Nous avons également récupéré les fiches de préparation produites par le professeur.
Gwen estime que les pré-requis de ses élèves sont :
-la lecture des écritures fractionnaires.
L'objectif visé par l'activité est : « *connaitre et utiliser l'écriture fractionnaire chiffrée. Savoir qu'une fraction peut être représentée de différentes façons. Exprimer sous forme d'une fraction chiffrée une représentation imagée.* »
Le déroulement de la séance se fera en trois étapes rythmées par trois activités. Nous ne présentons que la première. La procédure attendue est d'additionner les fractions pour retrouver une unité (1l) puis additionner les nombres entiers et comparer avec le volume du saladier (10 litres). La résolution de cet énoncé n'est possible que si la connaissance $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+=1$ est connue.
Sur les 23 élèves de cette classe de Zep[19], seul un groupe de trois arrive à trouver la réponse.
Gwen nous explique qu'il a conçu ce problème en essayant de construire un problème concret dont l'énoncé est compréhensible par tous. D'après lui, il présente une situation de recherche. Ces déclarations nous conduisent à penser que ce n'est pas la construction du savoir qui est visée en priorité. Ce qui semble guider le choix de Gwen est le sens de l'activité pour les élèves.
Le tableau ci-dessous propose à gauche l'activité proposée et à droite l'institutionnalisation écrite distribuée à l'issue de la recherche.

<table>
<tr><td>L'activité proposée aux élèves</td><td>La trace écrite : leçon à apprendre.</td></tr>
<tr><td>Jean et Alexandre préparent un cocktail de jus de fruits pour leur anniversaire.
Jus d'orange : 2L.
Jus de pommes : $\frac{1}{2}$L
Jus de citron : $\frac{1}{2}$ L.
Jus d'ananas : 1L.
Raisin : $\frac{1}{2}$ L
Eau gazeuse : 3L.</td><td>
N2 Les fractions
1)Lire et écrire des fractions.
• Une fraction est un nombre. Elle est composée de deux parties :
le numérateur → 4 ← le nombre de parts utilisées
le dénominateur → 5 ← le nombre de parts de l'unité
Mon unité (camembert, bande...) est divisée en 5 parts, j'en prends 4.
• $\frac{1}{2}$ se lit : un demi $\frac{3}{2}$ se lit : trois demis $\frac{1}{3}$ se lit : un tiers $\frac{5}{3}$ se lit : cinq tiers
$\frac{1}{4}$ se lit : un quart $\frac{3}{4}$ se lit : trois quarts $\frac{7}{10}$ se lit : sept dixièmes $\frac{9}{5}$ se lit : neuf cinquièmes</td></tr>
</table>

[17] *Expliquer Cafipemf (certificat d'aptitude aux fonctions d'instituteur ou de professeur des écoles maitres formateurs: examen professionnel. Les conditions de l'examen sont à lire :* *http://www.education.gouv.fr/botexte/bo020613/MENE0201294C.htm. Ce sont les conditions avant les modifications apportées en 2015 :* *http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=91551.*

[18] *Une étude plus approfondie est renvoyée au chapitre 8.*

[19] *ZEP : zone d'éducation prioritaire.*

Sirop : $\frac{1}{2}$ L Pourront-ils servir ce cocktail dans un saladier de 10L ? Justifie ta réponse.	

Gwen propose une seule trace écrite sur le chapitre des fractions, cette trace rappelle ce que sont les numérateurs et les dénominateurs. Lors des mises en commun, il institutionnalise qu'une fraction c'est une division. La situation présentée et les deux institutionnalisations formulées laissent envisager que la prise en charge du lien entre les deux textes décontextualisés et la situation soit à la charge complète des élèves. Enfin, annoncer que la fraction est une division est à la limite du programme de CM2 et sans aucun lien avec l'activité proposée.
Brousseau(1988), dénonçait certains mouvements pédagogiques qui avançaient que le concret, l'utile motivaient les élèves. Il voyait là l'expression d'un fossé qui se creusait entre pratiques et théories. Il s'interrogeait alors sur la place du savoir à l'école. Nous rejoignons les questionnements de Brousseau. Gwen met en avant des connaissances pédagogiques en citant les écrits de De Vecchi (2007), ce qu'il en retient et ce qu'il met en place dans sa classe est assez éloigné des préconisations de cet auteur. Nous avons vu deux autres séances de ce maître. À chaque fois ce maître propose des situations introductives qu'il crée puis les élèves ont à effectuer une batterie d'exercices trouvée sur Internet et divers manuels. Le maître prend en charge l'institutionnalisation dans le sens où il propose des leçons mais ne prend pas en charge la décontextualisation. Il présente un savoir pas nécessairement en lien avec l'activité et l'élève en fera ce qu'il peut. C'est pourquoi nous pensons qu'aucune proximité n'est pensée entre l'activité et le texte du savoir. L'activité n'est qu'un prétexte, un préalable sans lien avec le texte du savoir. Les élèves ont dû additionner des fractions, le texte définit ce que sont numérateur et dénominateur.
Nous nous interrogeons alors sur les connaissances didactiques et mathématiques de ce formateur. Comment ont-elles été construites, sur quoi s'appuie le professeur pour construire ses séances, pour établir des liens ? Ces écrits décontextualisés seront-ils utiles et utilisés par les élèves ?
Le concept de « *situation* » est utilisé sur le terrain avec des sens plus ou moins proches de ceux définis par Brousseau. Le mot « *situation* » est suivi de toutes sortes de qualificatifs comme situations concrètes, situations-problèmes. Ce mot situation est utilisé dans toutes les disciplines de l'école de l'Education physique sportive en passant par l'enseignement de la langue ou encore de l'histoire géographie ou de la musique.
Le lien entre toutes les définitions et quelle que soit la discipline est la capacité d'un élève à répondre à une question en fonction des documents ou matériel à sa disposition. Le « *poly-usage* » de ce mot rend parfois la tâche du maître difficile. Il emprunte une définition de situation dans une discipline donnée et le transpose sans vraiment prendre en compte la spécificité de la discipline.
Dans l'exemple que nous avons montré, l'activité ne permet pas de mettre en fonctionnement des connaissances sur les fractions ni de donner du sens à ces nouveaux nombres. Cette activité est fortement didactique. L'absence de lien entre l'activité et le texte du savoir rend difficile, à nos yeux, l'appropriation de nouvelles connaissances. C'est pourquoi le choix de la situation (au sens de Brousseau) apparaît comme une condition nécessaire pour enclencher le Processus d'Institutionnalisation. La situation bien choisie en

fonction de ses potentialités a-didactiques permet l'élaboration de connaissances en contexte. C'est alors seulement que se pose la question de la décontextualisation.

3.3 Gestion de classe et enseignement par des situations.

Nous reprenons l'idée développée dans le paragraphe précédent. Nous nous intéressons aux questions liées à la décontextualisation du savoir dans le cas où les situations choisies mettent en fonctionnement et font émerger les nouvelles connaissances attendues. Dans ce paragraphe nous allons surtout livrer nos questions sur la place de ces moments où le maître va être conduit à décontextualiser. Quelle est la « *bonne distance* » avec la situation pour décontextualiser ? Y a-t-il des étapes intermédiaires à respecter avant de proposer un texte de savoir dont le degré de formalisation du texte sera le plus adapté possible ? Le maître négocie-t-il ce qu'il a à enseigner comme le suggère Brousseau ? Quels indices prendra-t-il pour déterminer si les élèves ont saisi certains des enjeux de la situation ? Sur quels documents le maître pourra-t-il s'appuyer ou non pour produire ces textes tant à l'oral qu'à l'écrit ?

3.3.1 Du niveau de formalisation des savoirs, des mots utilisés pour dire, nommer ces savoirs en jeu.

Institutionnaliser va impliquer potentiellement l'écriture d'un texte destiné à être appris. Les professeurs face à cette tâche doivent effectuer des choix sur le degré de généralisation, sur le niveau de formalisation à adopter. Leurs choix dépendent de l'âge des élèves, des programmes en vigueur mais aussi de leurs croyances. Ainsi, Stéphanie, enseignante de CM2 explique qu'elle ne dit pas à ses élèves ce qu'sont un dividende ni même un diviseur car ce sont des mots compliqués. En revanche, elle parle du Tiers Etat et du partage du pouvoir, du COD et de l'accord en genre et en nombre de l'adjectif qualificatif. Il est difficile pour nous de définir ce que signifie une notion « *compliquée* » au vu de ces exemples.

Stéphanie est un professeur polyvalent, elle a une licence d'histoire et il est probable que la distance entre son savoir et son rapport à l'enseignement de l'histoire n'est pas de la même nature que celui qu'elle a avec les mathématiques. Mais cela ne nous suffit pas à expliquer les raisons d'utilisation d'un certain niveau de langage. Cela n'explique pas pourquoi une enseignante ne s'autorise pas certains apports prétextant qu'ils ne sont pas assez proches de ce que comprennent les élèves. Stéphanie n'utilise pas ces mots alors qu'elle les connaît, elle ne les utilise pas parce qu'ils lui semblent inaccessibles.

Nous voyons dans ces difficultés à s'autoriser ou non l'usage d'un vocabulaire (lié à des connaissances) les problématiques liées aux connaissances disponibles et/ou naturalisées du côté du professeur. Le problème inverse de Stéphanie existe. Parfois les maitres ont des connaissances dites naturalisées, ils peuvent alors évoquer des savoirs hors du champ des apprentissages des élèves ou bien aller si vite dans les expositions de connaissances que leur discours est inadapté.

C'est ainsi que d'un extrême à l'autre nous avons pointé ces distances de nature différentes.
Nous avons relevé dans les enseignants de notre étude (Solène, Sasha, Julien et Gwen) ces imprécisions.

Solène demande à ses élèves de « *traduire* » des fractions au lieu « *d'exprimer* ». Gwen « *oriente* » les fractions en disant que le « *numérateur est en haut et le dénominateur est en bas* ». Sasha oriente également les fractions en expliquant que le numérateur est un mot qui commence par nuage et est en haut. Julien explique que pour simplifier une fraction il suffit de chercher si le nombre du haut appartient à la table du nombre du bas sans aucune justification. Il ajoute que si le nombre du haut est comme celui du bas alors il est possible de les barrer. Enfin il appelle les fractions inférieures à l'unité des « *petites fractions* ». Ces préoccupations discursives ne sont pas l'expression de méconnaissances mathématiques.
Ils sont l'expression du souci d'établir des proximités langagières (Robert 2015) avec leurs élèves. Les programmes laissent des marges de manœuvre assez importantes aux enseignants si bien que dans certains cas ils ne savent pas jusqu'où aller sans avoir le sentiment d'empiéter sur le programme du collège.
Nous ne listons que quelques-unes des imprécisions relevées tout le long de ces 4 années d'étude. Ce qui nous questionne ce ne sont pas ces imprécisions, ce sont plutôt leurs raisons d'être. Une explication qui ne nous suffit pas est de dire que ces enseignants ne sont pas spécialistes de la discipline. Pour Solène, Gwen, Julien, Sasha nous ne pouvons pas nous permettre de dire cela.[20]Julien est tout à fait capable de donner une règle correcte, apprise par cœur pour expliquer la simplification des fractions. Il nous explique que « *simplifier* » signifie rendre la fraction irréductible (sans pour autant donner le sens d'irréductible). Il ajoute que pour simplifier il faut trouver le plus grand multiple possible du dénominateur au numérateur. Il déclare ne pas pouvoir l'expliquer ainsi aux élèves. Lorsque je lui demande d'expliquer l'exercice en utilisant le matériel des bandes sur la fraction $\frac{17}{3}$.[21]Il me répond qu'il aurait pu l'utiliser mais qu'il pensait qu'il n'en avait pas le droit et qu'il n'y a pas pensé. Julien est dans une posture inconfortable, il propose des règles comme « *On cherche dans la table de trois le nombre qui se rapproche le plus de 17* » sans justifier le choix du trois, ce qu'un élève lui fait remarquer. Julien conclut « *parce que c'est comme ça* »
Nous pouvons interpréter ces différents exemples selon plusieurs axes. Tout d'abord du côté plus didactique : jusqu'à quel moment peut-on utiliser du matériel (en dehors de la situation d'action) pour valider des réponses. Ce qui revient à recontextualiser pour favoriser la décontextualisation. Nous voyons aussi la question du professeur qui se demande jusqu'où il a le droit d'enseigner des mathématiques en s'appuyant sur quel vocabulaire (sans réduire l'enseignement à cela), quel formalisme…
Nous pouvons aussi entendre la difficulté du professeur à re-penser en contexte alors que l'enseignant a acquis un certain niveau de formalisation et de généralisation du savoir.

3.3.2 Synthèse

Plusieurs contraintes et interrogations s'expriment à travers ces exemples, parfois un manque de connaissances mathématiques conduit les professeurs à écrire des textes comportant de nombreuses maladresses. Les textes de savoir des professeurs sont aussi guidés par des contraintes déclarées des professeurs telles que se rapprocher du vocabulaire connu des élèves (fractions irréductibles déclarées être une petite fraction), mais aussi la

[20] *Voir la présentation de leurs parcours chapitre méthodologie*

[21] *Cela revient à afficher 6 bandes de 3 tiers et ainsi de conclure que 17/3 c'est 5 bandes unités et 1/3 de cette bande*

légitimité de dire ce qu'ils ont à dire. Solène n'utilise pas le mot « *exprime* » mais « *traduit* » car l'un semble avoir plus de sens et que l'autre appartient au vocabulaire mathématique du secondaire. Il ne lui est pas « *naturel* ».
Clairement les positions de ces professeurs sont inconfortables, ils ne sont pas spécialistes de la discipline, ne veulent pas empiéter sur les « *nouveautés* » de la sixième, veulent prendre en considération le niveau de langage des élèves, ne savent pas ce qu'ils ont le droit de dire et de faire. Solène, en 2014 n'écrira que 4 leçons sur l'ensemble de l'année, elle explique ses difficultés pour écrire des leçons car elle pense « *ne pas savoir faire* ». Ces difficultés pour trouver les mots pour le dire peuvent expliquer les difficultés pour trouver les mots pour l'écrire. La difficulté pour le maître à repenser en contexte peut aussi l'amener à utiliser des mots, des définitions voire un formalisme qui ne correspond pas à ce que les élèves ont la capacité d'entendre au regard des apprentissages précédents.

3.4 Place de la contextualisation dans la mémorisation

3.4.1 Décontextualisation et conceptualisation pour les psychologues.

Les composantes des connaissances d'un point de vue de la psychologie cognitive sont assez différentes selon les courants théoriques. Le courant piagétien a valorisé les opérations mentales tandis que d'autres mouvements s'intéressent au stockage des informations dans la mémoire à long terme et sur la forme de représentation des concepts. On distingue alors connaissances déclaratives et procédurales, Weil-Barais définit les connaissances dites contextualisées ainsi

> *« Si l'on se réfère à des domaines de connaissances fortement conceptualisés tels que les mathématiques ou les sciences physiques par exemple, aucune de ces conceptions ne s'avère satisfaisante. En effet, si on considère la nature des transformations nécessaires pour s'approprier les connaissances relatives à ces domaines, on s'aperçoit que ces transformations interviennent à la fois sur le plan des opérations de la pensée, sur celui des concepts et des classes de problèmes auxquels ils s'appliquent, et enfin, sur celui des systèmes de représentation symbolique utilisés pour communiquer et résoudre des problèmes. Ces différents aspects, distinguables au plan de l'exposé, sont de fait très imbriqués sur le plan du fonctionnement cognitif. La plupart des auteurs qui travaillent sur ces domaines mettent l'accord sur le fait que les opérations de pensée, les concepts et les systèmes symboliques restent étroitement associés aux situations dans lesquelles le sujet a été amené à les utiliser. Pour caractériser ce fait, les connaissances sont dites contextualisées. ».*[22] (Weil-Barais 2005, p.443)

Les enseignants savent cela en acte. Lorsqu'une difficulté surgit, ils vont alors rappeler aux élèves le contexte de leurs apprentissages. Ce rappel ne remobilise pas uniquement l'énoncé de la situation mais convoque aussi toute l'activité mentale qui y est associée. C'est ainsi que le caractère contextualisé des connaissances est incontournable. La mémoire didactique (Centeno 1991) prend la forme de l'évocation explicite par l'enseignant de la situation et

[22] *Souligné par nous.*

peut être vue comme une re-contextualisation. Cette re-contextualisation est un moyen pour mobiliser les connaissances anciennes des élèves.
Deux processus coexistent (Weil-Barais 2005) : un processus de généralisation et de transfert et un processus de contextualisation, décontextualisation et re-contextualisation. Les deux processus coexistent car apprendre seulement en s'appuyant sur des règles générales ne fait pas accéder au concept d'une notion. Par ailleurs il n'est pas non plus possible de réduire l'apprentissage à une modification du contexte du fonctionnement de la pensée.
Weil-Barais rappelle que les opérations de la pensée, les concepts et les systèmes symboliques restent associés aux situations. L'enseignement vise à réussir ce détachement, cet éloignement aux situations. Les mathématiques sont une science qui a son propre langage riche de systèmes symboliques. Ces systèmes permettent de construire des énoncés dépersonnalisés et décontextualisés, très généraux.

3.4.2 Conceptualisation du savoir et place du langage.

Vergnaud (1983) a développé la théorie des champs conceptuels. Cette théorie a pour fondement des résultats de la psychologie cognitive. Théorie qui se définit comme une théorie psychologique du concept ou encore de la conceptualisation du réel. Les exemples développés dans ses premiers écrits sont ceux liés aux structures additives et multiplicatives.
Pour notre étude, nous allons nous appuyer sur plusieurs résultats issus de cette théorie.
Tout d'abord, un concept ne peut être réduit à sa définition si l'on s'intéresse à l'apprentissage et à l'enseignement. Un enfant apprend des problèmes et des situations qu'il rencontre. C'est dans l'action qu'un concept prend son sens.
Vergnaud (1990) explique par ailleurs qu'il y a un lien étroit entre le langage, le symbolisme mathématique et la construction du concept sans pour autant pouvoir avoir les moyens d'expliquer pourquoi :

> *« Toutefois l'action opératoire n'est pas le tout de la conceptualisation du réel, loin de là. On ne débat pas de la vérité ou de la fausseté d'un énoncé totalement implicite, et on n'identifie pas les aspects du réel auxquels il faut prêter attention, sans l'aide de mots, d'énoncés, de symboles et de signes. L'usage de signifiants explicites est indispensable à la conceptualisation. C'est ce qui conduit à considérer qu'un concept est un triplet de trois ensembles :*
> *C=(S, I, S) :*
> *S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)*
> *I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié).*
> *S : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). »* (Vergnaud 1990, p.145)

Etudier les moments d'exposition du savoir revient à étudier aussi les mises en mots, les mises en textes au service des contenus mathématiques. C'est d'autant plus important à l'école primaire où l'accès au formalisme mathématique est plus limité.
Butlen et al (2003) montrent comment la prise en charge d'écrits intermédiaires produits par les élèves permet pour la plupart d'entre eux de mieux acquérir un concept.

3.5 La textualisation du savoir.

Un texte de savoir est essentiel mais ne semble pas suffire à aider à la décontextualisation ou encore à passer du particulier –une situation et un scénario associés- au général (réutiliser ces connaissances dans d'autres situations plus ou moins proches). Les conditions favorables au Processus d'Institutionnalisation dépassent le choix de la situation ayant le plus de potentiel a-didactique et un texte associé. Doit-on proposer un texte de savoir ou des textes de savoirs ? Quelle est la place des textes de savoir intermédiaires ? Quelles articulations possibles ?

Nous avons pointé que l'institutionnalisation relevait au minimum de deux processus :

-le Processus de Contextualisation (par une situation d'action), de Décontextualisation (phase de formulation, moment de discussion autour du savoir en jeu) et Recontextualisation (parfois lors des phases de rappel). Nous noterons PCDR ce processus qui permet d'ancrer l'ancien dans le nouveau.

L'unité de ce processus est ce qui rattaché à une situation. Le changement de situation conduit à l'élaboration d'un nouveau cycle.

-un processus de transfert et de généralisation. Nous pouvons raisonnablement penser qu'il y a un apprentissage effectif si quelle que soit la situation, le contexte donné, l'élève reconnait et mobilise la connaissance en jeu. Il utilise le général pour traiter le particulier. Nous noterons PTG ce processus qui encapsule le PCDR. PTG peut encapsuler plusieurs PCDR.

Ces deux processus coexistent et peuvent aboutir à des textes de savoir qui auront des contenus, des formes différentes. Fabre (2007) distingue

-des textes qui conservent la trace de la situation étudiée et qui pour nous relèvent du PCDR

-des textes qui masquent le caractère de réponse à un problème et qui pour nous relèvent du PTG.

Quels vont être alors les contenus et les formes du discours (écrit ou oral) associé à ces deux types de textes ?

Il semble assez ambitieux de penser qu'une seule situation, aussi fondamentale soit-elle, permette aux élèves de conceptualiser une notion. Vergnaud (1990), lorsqu'il définit ce qu'est un concept décrit l'un de ses éléments : l'ensemble des situations. Cet élément du triplet n'est qu'une des parties constitutives d'un concept.

Conceptualiser nécessite un certain niveau de généralisation. Dans la Théorie des Situations Didactiques, suite à une situation d'action, les élèves seront amenés à formuler à autrui ou à eux-mêmes ce que la situation leur a permis de développer comme nouvelle connaissance (situation de formulation). Dans l'ingénierie sur la construction des rationnels et des décimaux (Brousseau 1987), les élèves se confrontent à divers aspects du concept dans différents cadres (numériques, fonctionnels, géométriques). Ils sont amenés à produire des textes intermédiaires pour s'accorder sur la manière d'écrire les couples de nombres. Ces textes sont des réponses à des questions.

À la suite de chacune des 65 leçons décrites (qu'on appellera séances) on ne trouve pas systématiquement une proposition d'institutionnalisation. Les séances se terminent parfois par un constat qui va ouvrir vers d'autres questions. Ainsi la séance 4 est introduite ainsi « $\frac{8}{100}$, $\frac{9}{45}$ *sont-ils des nombres ? Ce que nous avons fabriqué pour mesurer les épaisseurs est-ce que ce sont des nombres ?* »

Les élèves discutent, les partisans du oui mettent en avant que deux nombres font un nombre alors que les autres disent que $\frac{8}{100}$'écrit avec deux nombres sans lui accorder le statut de nombre. Face aux différents arguments, l'enseignant répond par une question « *que peut-on faire avec des nombres ?* », s'ensuit une discussion sur ce qu'il est possible de faire avec des nombres. Tous, ensemble vont décider de faire des opérations en suivant le raisonnement suivant : avec les nombres on peut faire des opérations donc si on peut faire des opérations alors ce sont des nombres.

La séance est conclue ainsi sans institutionnalisation mais Brousseau note que tous les élèves savent additionner d'abord des fractions qui ont un même dénominateur puis celles dont les dénominateurs sont différents. Pour réussir cette tâche, ils avaient la possibilité d'utiliser leur matériel (les feuilles de papier de différentes épaisseurs)

La séance 5 débute par une re-contextualisation qui rappelle le milieu matériel, suivie d'une mise en perspective du savoir en jeu « *c'est-à-dire avec n'importe quelles fractions.* » autrement dit ce que les élèves savent faire avec n'importe quelles épaisseurs de feuilles permet de savoir faire avec n'importe quelles fractions. La décontextualisation conduit à une généralisation.

Plusieurs calculs de sommes sont proposés et Brousseau explique que cette séance n'est pas une séance d'entrainement ou de contrôle des connaissances. L'enseignant ne statue pas sur l'efficacité d'une procédure en particulier, en revanche, il doit, pour chaque exercice, organiser et favoriser la recherche individuelle, la mise en commun des résultats, la confrontation des méthodes et la discussion et validation par les enfants.

Nous retrouvons ici les points developpés dans les paragraphes ci-dessus, l'enseignant est conduit à être celui qui fait vivre le PCDR. On retrouve ce processus lors des mises en commun mais aussi lors de l'énoncé des consignes. Cette recontextualisation contextualisation permet de remobiliser les connaissances qui ont émergé dans le milieu et de mettre en projet les élèves. Ces derniers n'apprennent pas à mesurer des piles de feuilles mais ils apprennent les fractions. Ce processus est aussi pris en charge lors de la validation par les élèves.

En revanche le PTG se réalise beaucoup plus loin voire est abouti au bout des 65 leçons L'échelle de temps n'est pas le même. Le PCDR décrit des cycles courts dont une phase peut être une séance alors que PTG décrit un processus long dont l'unité de temps n'est pas définie. Nous n'oublions pas dans cette démonstration que Brousseau met en garde d'utiliser ces 65 séances dans un enseignement ordinaire. Nous nous demandons, comment s'expriment ces deux processus dans l'enseignement ordinaire ? Combien de séances faut-il pour s'assurer que PCDR ait une existence et un rôle dans les apprentissages ? Quelles sont les conditions favorables pour que PTG soit réalisable en théorie et dans les classes?

3.6 Des conditions favorables à la décontextualisation.

3.6.1 Changement de cadre.

La décontextualisation n'est pas à la seule charge du maître. Il existe des conditions favorables à cette décontextualisation qui sont propres à la genèse des concepts mathématiques dans une classe et aux méthodes d'apprentissage.

Selon Douady (1992) les changements de cadre, et le passage d'outil à objet et réciproquement favorisent la décontextualisation Dans le cadre de la Dialectique Outils Objets, il y a apprentissage quand les connaissances seront à même de fonctionner comme

outils explicites et d'être adaptés dans des conditions d'emplois différents. Douady met aussi en évidence plusieurs cycles d'apprentissages, des longs et des plus courts. Elle explique que plusieurs situations peuvent être proposées, engageant le déroulement de plusieurs phases. Douady distingue au moins deux institutionnalisations, l'une locale dans laquelle les élèves échangent. Ces échanges permettent l'homogénéisation et la constitution d'un savoir de classe. L'autre plus globale, l' « *institutionnalisation/statut d'objet* »permet d'établir les conventions d'usage, et en quelque sorte de présenter un texte dont l'énoncé sera le plus générique ou formel possible.
Dans la Dialectique Outil Objet et la Théorie des Situations Didactiques, le modèle d'apprentissage est celui d'un modèle constructiviste. Notre d'étude a pour objectif de décrire le Processus d'Institutionnalisation pour des modèles d'apprentissage qui se rapprochent du modèle constructiviste. Notre hypothèse est que l'institutionnalisation n'induira ni les mêmes gestes professionnels ni les mêmes problématiques selon le modèle d'apprentissage sous-jacent. Enseigner en s'appuyant sur des situations revient à enseigner en rapport avec le contexte de la situation.
C'est pourquoi pour comprendre et décrire ce qui se joue lors du PI dans le cas d'un enseignement en situation, il nous semble indispensable de penser aux conditions favorables (en dehors du discours seul du maître) qui favorisent la décontextualisation.

3.6.2 Schémas de problèmes : vers une représentation des problèmes.

Julo (1995) s'intéresse à la représentation des problèmes et à l'existence de transfert lors de la résolution successive de plusieurs problèmes. En psychologie cognitive on parle de « *transfert chaque fois que la réalisation d'une tâche donnée a un effet sur la réalisation d'une tâche subséquente* ». Le fait est connu mais les raisons d'être beaucoup moins. Une méthode existe pour rendre compte de ce phénomène de transfert. Elle consiste à regarder si la résolution de problème à un effet sur la résolution d'un autre problème relevant du même concept peu de temps après. Julo (op.cit) distingue ce qu'il appelle un problème source : le premier problème dont on a trouvé la solution. Le problème cible celui qu'il va falloir résoudre. La résolution du deuxième problème permet de dire que le transfert a eu lieu. Pour qu'il y ait généralisation, il faut alors proposer un troisième problème sensiblement différent des deux premiers. Ces trois problèmes et les liens entretenus entre eux forment des schémas de problèmes. Ces schémas de problèmes favorisent une décontextualisation des connaissances mais n'en sont pas garants pour autant. Julo (op.cit) explique que dans ces expériences, certains étudiants avaient bien construit les schémas abstraits de solution mais n'arrivaient pas à résoudre le problème-cible. Ces étudiants savent quel outil mathématique mettre en œuvre mais ne parviennent pas à opérationnaliser leur représentation au moyen de cet outil et du schéma de solution qu'ils ont élaborés.
Julo (op.cit) distingue alors deux types de connaissances pour résoudre des problèmes, des connaissances opératoires (du côté de l'action) et identifiées entre autres par Piaget et des connaissances propres à la construction de la représentation des problèmes. Ces connaissances sont désignées sous le terme général de schémas de problèmes. Les travaux actuels essaient de déterminer comment ces autres connaissances permettent de mieux se représenter les problèmes.
Un point essentiel, que nous retenons, c'est que même lorsque l'objet de savoir est identifié, mobilisé en tant qu'outil, parfois il se peut que l'on ne puisse quand même pas résoudre un problème. Cette observation nous poussera à la prudence, l'élaboration d'un texte de savoir

est une étape essentielle dans la construction de ces connaissances mais n'est peut-être pas la clé de voute du travail de conceptualisation.
La reconnaissance des problèmes-sources permet lors de la résolution de problème-cible le transfert des connaissances. Identifier ce problème-source comme essentiel pour construire ces connaissances est une idée forte que nous reprenons et interprétons ainsi. Le rappel du contexte d'une situation rencontrée lors d'un apprentissage fait partie intégrante du processus d'apprentissage et ainsi du Processus d'Institutionnalisation induit. Sensevy (1996) identifie ce qu'il appelle les « *énoncés emblématiques* ». Ces énoncés font partie du référentiel des élèves, ils marquent leurs apprentissages et l'enseignant peut s'appuyer dessus pour mobiliser les connaissances en lien avec la situation. Perrin identifie des « *problèmes de référence* ». Douady estime qu'il est nécessaire de rencontrer deux situations dans deux cadres différents, Julo en propose trois. Brousseau quant à lui, suppose l'existence d'une situation fondamentale qui caractérise la connaissance visée et qui suffit à préserver le sens de cette connaissance.
Ce que nous retenons de ces différents auteurs c'est l'importance de situations de références dans le processus de conceptualisation sans pour autant en faire la preuve.

3.7 <u>Processus d'Institutionnalisation et mémoire didactique de la classe.</u>

Brousseau et Centeno (1991) ont conduit certaines expérimentations qui ont montré qu'il était difficile d'apprendre dans une classe « *sans mémoire* ». Brousseau et Centeno (op.cit) montrent à quel point cette mémoire didactique du maître permet de prendre en compte « *les apprentissages transitoires pour les élèves, les adaptations provisoires du maître, mais aussi les aménagements fugitifs du savoir enseigné ou même du milieu et des pratiques culturelles.* »(p169). L'utilisation de cette mémoire didactique a parfois des effets bénéfiques en remobilisant les actions et cheminements de la pensée liés à ce problème. En revanche, certaines recontextualisations peuvent ne pas être réalisées à bon escient et ainsi « *tuer le problème* ». Brousseau et Centeno (op.cit, p186) identifient les difficultés des enseignants à faire classe lorsqu'ils ne savent pas ce qui s'est passé lors des séances précédentes. Faire classe sans pouvoir s'appuyer sur la mémoire didactique de la classe a plusieurs effets dont celui de devoir « *articuler explicitement les apprentissages (surtout ceux qui portent sur des objectifs à moyen terme) et à le faire sur le mode de la raison (les articulations doivent être enseignées comme des savoirs.* ».
Dans leur conclusion, les deux auteurs rappellent que cette question de mémoire didactique ne se pose que par rapport à des modèles d'apprentissage qui laissent une certaine responsabilité aux élèves par rapport aux savoirs. « *Une méthode qui ne laisse pas de place à la genèse publique des savoirs des élèves n'a pas d'intérêt à interroger les connaissances provisoires des élèves ni à les remobiliser.* » Ils terminent sur une recommandation « *l'institution devrait donner aux maitres des moyens de gérer ces savoirs provisoires des élèves.* ».
Ces savoirs provisoires participent au Processus d'Institutionnalisation, leur émergence dans la classe est indispensable.

3.8 L'usage du matériel comme obstacle potentiel à la décontextualisation

Des difficultés liées à la décontextualisation ont été relevées dans les paragraphes précédents, nous en relevons un autre : celui de la capacité pour un élève de se mettre en projet ou non de décontextualiser.
L'élève qui sait que l'enjeu de la situation n'est pas de mesurer la pile des feuilles va se mettre en projet de découvrir l'enjeu du savoir. Si l'enjeu reste au stade matériel, alors l'apprentissage de ce que sont les fractions va sûrement être retardé. Perrin-Glorian (Perrin Glorian 1993b) décrit cela en ces termes :

> *« Une des principales explications que j'avance est que les élèves qui ne rencontrent pas ce genre de difficulté ont en quelque sorte un projet, le plus souvent implicite, il y a décontextualisation dès le moment où ils travaillent sur la situation d'action. Ils savent qu'il y aura peut-être lieu de réutiliser l'expérience acquise et ils cherchent à comprendre ce que la démarche qu'ils mettent au point sur un problème particulier a de généralisable. Ils se créent des représentations mentales non seulement pour résoudre le problème posé actuellement mais pour pouvoir en rappeler et réutiliser des éléments dans d'autres occasions »* (Perrin-Glorian 1993b, p.9)

Passer d'un langage naturel lié à l'utilisation d'un matériel à un texte plus formalisé plus généralisé est l'une des fonctions de l'institutionnalisation. Les explications du professeur peuvent rester au niveau de l'action des élèves sur le matériel, il aménage ainsi des proximités langagières parfois au détriment de la décontextualisation. Par exemple, lors d'une séance de classe, prendre la moitié d'une bande est expliqué ainsi : « *la moitié c'est quand on plie une bande en deux* ». Cette définition ancrée dans le matériel ne rend pas compte du fait que les deux parties sont superposables et n'explique pas ce qu'est un demi. Elle n'est pas suffisante, mais dans les actes elle ne pose pas de difficultés aux élèves. User de ces proximités est une entrée en matière et donne du sens aux actions. C'est en cela que nous disons que le PI a une dimension sociale : il permet de construire une culture commune pour autant nous pensons que les apports du professeur doivent permettre de dépasser la culture de la classe.

3.9 Une ou des institutionnalisations ?

Perrin (op.cit) montre aussi l'importance de ces savoirs intermédiaires, elle décrit également le PI comme un processus lent constitué de nombreux cycles :

> *« Je pense donc que, pour certains élèves au moins, l'institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation-décontextualisation, ce qui conduit à distinguer des étapes dans l'institutionnalisation :*
> *– institutionnalisations locales dans un ou plusieurs contextes, au sens de Douady (1984) utilise cette expression dans la description de la dialectique outil-objet.*
> *-réinvenstissement d'un contexte dans un autre : institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes.*

> *-cours construit par le professeur, donnant un statut d'objet mathématique à certaines des notions rencontrées par l'exposé des raisons du savoir.* » (Perrin 1993 b, pp.21-22)

Perrin distingue plusieurs niveaux d'institutionnalisations :

- les institutionnalisations locales réalisées juste après une résolution de problème
- les institutionnalisations qui permettent d'ancrer l'ancien dans le nouveau (qu'on rencontrera essentiellement dans les articulations entre les séances sur une même notion).
- les institutionnalisations plus globales qui renvoient à l'émergence du concept.

Les deux premières institutionnalisations sont constitutives du PCDR. Les institutionnalisations qualifiées de globales sont constitutives de PTG. Nous identifions aussi d'autres niveaux de l'institutionnalisation. Il est assez fréquent à l'oral de reprendre un élève car il parlera du nombre du bas à la place du dénominateur. Cette reprise est une <u>institutionnalisation en acte</u>. Le maître reprend le mot exact en montrant implicitement que pour se comprendre maintenant il s'agit d'utiliser le vocabulaire adéquat. Cette reprise participe à la « *publicité du savoir* » dans le sens où il reprend les bons termes et affiche que c'est ainsi qu'il faut en parler.
Nous rejoignons Brousseau, Centeno, Perrin sur l'existence de plusieurs institutionnalisations et avons identifié au moins deux dimensions au Processus d'Institutionnalisation. Nous allons dans la suite de notre étude d'une part décrire les expositions des connaissances qui apparaitront dans la dimension sociale du PI et d'autre part montrer ce que le maître met en œuvre pour favoriser la dimension cognitive (essentiellement du côté de la décontextualisation).

3.10 <u>Des ingénieries qui aident à la conceptualisation en s'appuyant sur l'écriture de textes.</u>

Sensevy (1996) a montré en quoi l'élaboration de textes dans ce qu'il appelle le journal des fractions était une aide à la décontextualisation. Ces textes intermédiaires écrits par les élèves permettaient une prise en charge des savoirs intermédiaires des élèves par le maître.
Butlen et Pezard (2003) ont construit une ingénierie qui allait consister à faire produire des textes de savoir intermédiaires par les élèves. Butlen et Pezard (2003) proposent alors une classification de ces textes selon des « *degrés de décontextualisation* ». Ils distinguent les énoncés mathématiques des énoncés de méthodes.
Pour les énoncés mathématiques, ils définissent trois degrés :
-degré 1 : énoncé formel, théorème, propriétés, définition
-degré 2 : règle formulée à partir d'un exemple
-degré 3 : exposition d'exemples et de contre-exemple.
Pour les énoncés de méthodes, ils en définissent 4, appelés méta.
-méta 1 : énoncé de méthodes très générales non liées à un contenu mathématique
-méta 2 : énoncé de règles ou de méthodes faisant référence à un contenu assez général
-méta 3 : énoncé de règles ou de méthodes décontextualisées mais attachées à un contenu mathématique précis.
-méta 4 : énoncé d'exemples ou de procédures ou de techniques de calcul contextualisés ou de démarches de résolution.

Les indices choisis permettent d'avoir une hiérarchisation du plus générique au moins générique.
La production de ces textes a globalement amélioré les compétences des élèves en étant toutefois plus efficace pour les élèves en difficulté moyenne. De plus les classes entraînées à produire de tels textes sont davantage centrées sur les contenus mathématiques, les textes produits sont alors plus décontextualisés.
Ce travail a permis de vérifier qu'il existait des étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation et d'en déterminer des conditions nécessaires (dont un travail sur la formulation qui induit un travail sur la décontextualisation). Les auteurs tiennent à souligner « *Que sans identifier complètement ces étapes à des pseudo-concepts*[23]*, elles semblent assurer des fonctions similaires.* ».

3.10.1 L'institutionnalisation dans les pratiques :

Nous étudions les pratiques de professeurs expérimentés, potentiellement relevant du i-genre 3. Pour déterminer le i-genre, il faut s'assurer que les professeurs installent la paix scolaire (couple paix sociale et adhésion des élèves au projet scolaire du professeur). D'après Butlen et al (2004), les pratiques du i-genre 3 favoriseraient les apprentissages des élèves car les 5 niveaux qui déterminent les pratiques sont atteints.
Ces 5 niveaux sont :
- niveau 1 : installation de la paix scolaire
- niveau 2 : proposition de problèmes consistants et aménagement des temps de recherche.
- niveau 3 : explicitation des procédures.
- niveau 4 : hiérarchisation des procédures et synthèse
- niveau 5 : institutionnalisation :

Ces auteurs définissent aussi la vigilance didactique qui est à la fois du côté du savoir mathématique, des connaissances didactiques et de leur mise en fonctionnement dans l'acte d'enseigner. Une « *bonne* » vigilance didactique assure un déroulement de classe piloté prioritairement par les mathématiques au plus près des apprentissages visés.
Butlen et al (2012) expliquent que cette vigilance intervient de manière déterminante sur les apprentissages des élèves aux niveaux 3, 4, 5 qui correspondent respectivement : explicitation des procédures, hiérarchisation et synthèse et institutionnalisation.
Enfin, ces auteurs étudient les pratiques de professeurs débutants. Il apparaît que le i-genre minoritaire appelé i-genre 3 montre des pratiques de professeurs qui ont acquis (de manière plus ou moins aboutie) les 5 niveaux décrits ci-dessus.

3.10.2 Discussion sur le niveau 5

Précision sur le vocabulaire utilisé.

Nous tenons à rappeler notre position par rapport au vocabulaire choisi et ce à quoi il renvoie. Nous adoptons le point de vue de Robert qui est de dire que :

---

[23] *Vygostky (1934) décrit le processus de formation des concepts comme le passage d'une structure de généralisation à une autre et définit les pseudo concepts. Il s'agit d'un équivalent fonctionnel du concept, en apparence semblable au concept, mais qui en diffère quant au mode de généralisation et de catégorisation dont il résulte : cité dans Butlen et Pézard.*

> *« De fait le mot institutionnalisation, si on revient à la Théorie des Situations Didactiques, est trop restrictif – c'est pourquoi nous évoquons l'exposition de connaissances. Le questionnement s'élargit alors. Il est ainsi raisonnable de penser que les formes que prend le cours dépendent directement des types de notions et qu'il n'y a donc peut-être pas de proposition générale à faire. Il est aussi possible que le rôle de ces moments dépende des élèves – on a déjà constaté que certains sont aidés par des interventions méta avant une intervention mathématique et d'autres non… les conséquences de cette dernière variabilité ne sont pas évidentes. »* (Robert 2015, p.3)

Nous ajoutons en nous appuyant sur les travaux de Perrin (1993a, 1993b) que les institutionnalisations auront des « *facettes* » « *différentes* » selon le contenu à enseigner mais aussi selon les moments où elles interviennent. Les moments sont reliés à leur rôle, à quoi servent ces EC ? Dans quel but sont-elles produites et pour qui ?
Discutons ce point en rappelant les diverses fonctions des institutionnalisations envisagées par Perrin :
Perrin distingue plusieurs « *facettes* » de ce que nous appelons les EC :
- les EC locales réalisées juste après une résolution de problème
- les EC qui permettent d'ancrer l'ancien dans le nouveau (qu'on rencontrera essentiellement dans les articulations entre les séances sur une même notion)
- les EC plus globales qui renvoient à l'émergence du concept.

Moments de production

Les moments de production de ces EC ne produisent pas les mêmes énoncés ni n'ont les mêmes fonctions.
Les premiers moments auxquels nous pensons, en dehors de moments exclusivement réservés aux EC sont les phases de rappel. Elles sont présentes le plus souvent en début de séance ce qui permet les articulations entre connaissances anciennes et nouvelles.
Nous distinguons deux types de phases de rappel : celles que nous nommons « *provoquées* » et les phases de rappel « *de liaison* ». Ces phases de rappel relèvent du niveau 5 car appartenant au Processus d'Institutionnalisation.
Les phases de rappel que nous qualifions de liaison sont celles placées entre deux séances.
Elles articulent les deux séances. Nous envisageons différentes gestions de ces phases :
- des rappels oraux et une discussion collective.
- des exercices sur ardoise, cahier qui remobilise les connaissances
- des échanges autour d'une trace écrite, d'une affiche.

Les phases de rappel qualifiées de « provoquées » sont celles qui correspondent à ce que le professeur met en œuvre au début d'une première séance, sans articulation avec une autre, pour mobiliser des connaissances nécessaires à la réalisation de la tâche (c'est le côté outil des connaissances qui est alors mobilisé) sans rappel à une autre situation.
D'autres moments sont propices à des EC comme :
-les mises communs moments (niveau 3 et 4) juste après une résolution de problèmes qui permettent des expositions de connaissance plus locales et sûrement en primaire des EC plus procédurales.
-les synthèses et phrase de conclusion (niveau 4) : les phrases de conclusion permettent des EC locales et ont pour objectif de dire ce qu'il y a à retenir de la séance, les synthèses

(surtout au terme de plusieurs séances) peuvent prendre en charge des EC plus globales. Les synthèses, pour nous, proposent des EC plus globales et les inscrivent dans le projet plus « *large* » que celui de la séance.
Il y a aussi des moments essentiellement consacrés à l'EC (vers le niveau 5), ces moments sont annoncés par « *on va lire la leçon* » ce qui en d'autres termes signifie « *celle que vous allez apprendre* ».
C'est là que nous trouvons à discuter sur le niveau 5. Si l'institutionnalisation relève d'un processus, il n'est pas nécessairement identifiable (sauf à l'écrit) et relève de la somme des EC produites. C'est la somme de ces EC des plus locales aux plus globales qui permettra de dire si le niveau 5 est atteint.
Ces EC s'accumulent et s'articulent entre elles. Les énoncés de ces EC ne sont pas de même nature selon la fonction qu'elles ont. Ainsi, dire que la moitié c'est « plier en deux une bande et un prendre une des deux moitiés »(1) n'est pas comme dire que la moitié « *c'est comme diviser par deux* »(2).
Quand faut-il alors conclure que le niveau 5 est atteint ? De plus, peut-on dire que le niveau 5 est atteint si l'enseignant distribue une trace écrite sans jamais l'exploiter ? Il y a alors l'intention de la part de l'enseignant d'institutionnaliser sans pour autant que l'institutionnalisation soit effective.
L'accomplissement du niveau 5, d'après nous, se réalise après une étude des EC et de leur montée en généralité.

3.10.3 EC décontextualisées et EC généralisées

Nous distinguons parfois EC décontextualisées et EC généralisées. En fait il y aurait peut-être lieu d'introduire le terme de généralisation - tout comme décontextualisation. Une décontextualisation embarque une certaine généralisation mais ce qu'elle « *produit* » (le décontextualisé) n'est pas forcément général, au sens où il n'y a pas de quantificateur universel même implicite dedans. Si suite à des pliages, les élèves produisent cette expression générique du type « $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ », cette dernière n'est pas générale en ce sens, car, même si implicitement, elle peut être généralisée, les conditions de la généralisation ne sont pas présentes. Il n'est pas certain que les élèves comprennent que cette expression est vraie en dehors de son contexte d'émergence (c'est-à-dire les bandes). L'expression $\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{2}{p}$ serait plus générale, car p est l'indication d'une variable (avec un « *quel que soit* » implicite).

3.10.4 Catégorisation des EC et type d'énoncés

Butlen et al (2003) ont étudié les productions d'énoncés réalisées à la suite de séances en calcul mental par des élèves. Nous nous intéressons à la production d'EC réalisée à tous les moments d'une séance par le professeur. Ces auteurs distinguent trois groupes de types d'énoncés :
Groupe 1 : exemples de méthodes et d'exemples mathématiques illustrant une action ou une consigne.
Groupe 2 : énoncés intermédiaires entre l'exemple seul ou l'énoncé formel.
Groupe 3 : énoncés mathématiques ou de méthodes formelles.

Nous gardons cette typologie comme base de notre travail, en gardant à l'esprit que les EC que nous étudions sont produites par les enseignants et pas nécessairement après des phases d'action.

Par exemple : dire que la moitié c'est « *plier en deux une bande et prendre une des deux moitiés* »(1) n'est pas comme dire que la moitié « *c'est comme diviser par deux* »(2).

L'énoncé 1, d'après Butlen et al (op.cit) relèvent d'un énoncé intermédiaire entre l'exemple seul et l'énoncé formel (groupe2), l'énoncé est fortement contextualisé induisant une règle à caractère général mais non formulée. Cet énoncé est dit avant la phase d'action. L'énoncé (2) relève d'un énoncé mathématique ou de méthode formelle. L'énoncé 2 permet aussi de prendre la moitié d'une bande, mais l'énoncé 1 donne la technique associée (plier en deux, en oubliant toutefois de dire que les deux parties doivent être superposables). En revanche l'énoncé 1 ne permet pas de trouver la moitié d'un nombre. L'énoncé 1 fait référence à un matériel et une action à réaliser alors que l'énoncé 2 même s'il est plus général renvoie plus naturellement au numérique. Ces deux énoncés participent à construire le concept de moitié.

L'énoncé (2) ne suffit pas dans une classe pour trouver la moitié d'une bande et le (1) ne suffit pas pour déterminer la moitié d'un nombre.

Caractériser les énoncés produits par les enseignants en utilisant la distinction des trois groupes déjà réalisée devrait contribuer à affiner la distinction. Nous voulons également prendre en compte les proximités langagières (élèves-enseignants) et leur prise en compte sur les EC et les moments de leur production.

Selon ces moments les EC auront des niveaux de décontextualisation et de recontextualisations différents. Alors que l'énoncé (1) : « *plier en deux une bande et en prendre une des deux moitiés* », recontextualise la connaissance dans le contexte de la découverte. L'énoncé (3) « *donc c'est couper en deux un nombre ou une figure* » propose une recontextualisation un autre contexte évoquant pour celui des figures un contexte d'aire.

Nous y voyons donc deux types d'EC, des EC hors contexte (proposant des énoncés plutôt généraux) et des EC en contexte.

Ces EC sont à étudier car l'appui sur le contexte pour les énoncés relève ce qui est en jeu dans la mémorisation des connaissances. Ces EC s'appuient sur la mémoire didactique de la classe, elles racontent l'histoire de la construction du savoir dans la classe.

Les EC en contexte sont de deux types :

-Les EC de type Remise dans le même Contexte [EC_{rmc}]

-Les EC de type Nouveau Contexte : l'exposition de connaissances est illustrée à partir d'un nouveau contexte, les EC_{NC} participent à la décontextualisation en favorisant les changements de contexte mais aussi les jeux de cadre.

Les EC qui jouent sur des recontextualisations de deux types ont des fonctions différentes :

-[EC_{rmc}] : mobilise les connaissances en acte liées à la situation vécue, elles permettent les premières articulations entre le langage du registre de l'action vers le registre symbolique (et du vocabulaire mathématique associé)

- [EC_{NC}] : articule les changements de contexte, les recontextualisations sont au sens de la Théorie des Situations Didactiques.

Les [EC_G] : exposition de connaissances dont les énoncés sont formels et ont un degré de généralité plus important.

Nous sommes en mesure de distinguer 3 catégories d'EC qui seront produites à différents moments des séances.

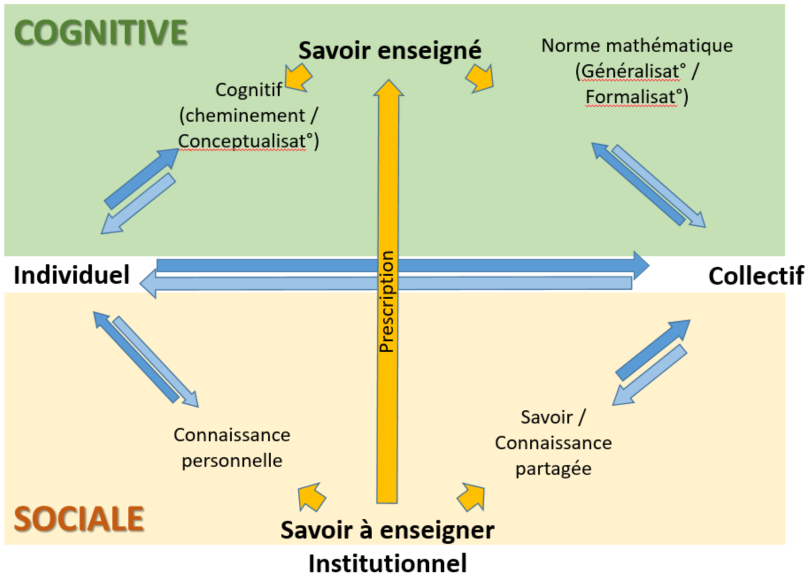
Nous tentons de catégoriser les EC. Pour cela il faut distinguer leurs fonctions de leurs contenus. Nous avons déterminé des moments plus privilégiés que d'autres pour les EC : les phases de rappel (de liaison ou provoquées), mais aussi les fins des synthèses que nous avons appelées les phases de conclusion.
Dans les phases de rappel nous pouvons identifier des types d'EC, celles qui servent à remobiliser non seulement les connaissances mais aussi toutes les actions qui ont amené à cette nouvelle connaissance. Ces EC font partie intégrante de la mémoire didactique de la classe, demander aux élèves « *rappelez-vous ce que nous avons fait sur les bandes ?* » (1) n'engage pas les mêmes discussions, réactions de leur part que la question « [24]*quelle est l'écriture fractionnaire de un demi ?* »(2). La question (1) ne va pas immédiatement amener à des EC mais va permettre d'ancrer le nouveau dans l'ancien. Les EC relevées suite à cette question sont : « *Vous avez appris à plier des bandes pour faire des demis et des quarts* ». Cette EC très locale peut paraitre pauvre en termes de contenu, l'enseignante rappelle le contexte et montre ce que sont des demis et des quarts au regard du contexte.
La question (2) mobilise une écriture sans ancrage dans l'histoire de la classe mais montre ce qu'il y a à savoir explicitement. Poser cette question revient à dire que les élèves doivent le savoir en dehors de tout rappel du contexte.

4 Conclusion

Ce chapitre nous permet, d'un point de vue théorique, de proposer un « *éclaircissement* » du concept de Processus d'Institutionnalisation. Tout d'abord nous avons défini deux dimensions de l'institutionnalisation, d'une part sa dimension sociale et d'autre part sa dimension cognitive. La dimension sociale permet d'échanger autour d'un savoir commun, d'augmenter l'équilibre des savoirs partagés entre les élèves et entre les élèves et le maître. Les échanges collectifs vont essentiellement permettre la dépersonnalisation du savoir. La dépersonnalisation du savoir est un mouvement double : l'élève doit avoir conscience que les connaissances qu'il utilise sont parfois communes et partagées, mais aussi que ce que transmet le maître ne lui appartient pas. Pour distinguer ces deux mouvements, nous avons introduit la notion de dépersonnification.
La dimension cognitive est celle qui permet au sujet de se construire à travers les apprentissages. Les échanges collectifs et la mise en projet de l'élève de comprendre l'enjeu de la situation peuvent conduire à la décontextualisation. Cette décontextualisation ne va pas de soi et c'est au maître d'en favoriser l'appropriation didactique. Pour cela, le maître peut s'appuyer sur des changements de cadre, favoriser les échanges autour des connaissances provisoires, encourager la textualisation de ces mêmes connaissances, « *trouver les mots pour le dire* ». Nous allons par la suite, voir comment en acte ces connaissances existent ou non dans les pratiques des professeurs.
Dans le schéma suivant nous montrons les relations qui existent entre les deux dimensions autour de 4 pôles (Individuel/collectif et savoir à enseigner/ savoir enseigné)

[24] *Suggérée par nous*

Schéma 2.

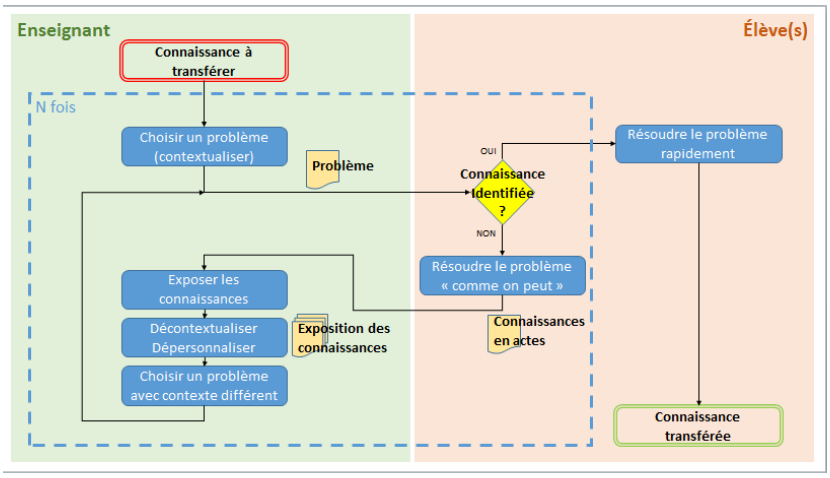


Ces deux dimensions sont traversées par deux processus constitutifs du Processus d'Institutionnalisation : Le PCDR et le PTG. Ces deux processus sont dialectiquement liés dans le sens ou PTG contient le PCDR.

Nous rappelons que le Processus d'Institutionnalisation souhaite atteindre la construction des apprentissages dont l'exposition des connaissances n'en est que l'expression. Le schéma ci-dessous, décrit le processus d'apprentissage tel que nous l'imaginons en nous appuyant sur la Théorie des Situations Didactiques et la DOO. L'enseignant enseigne selon des prescriptions institutionnelles et un modèle empruntant à la Théorie des Situations Didactiques, présenté plus ou moins explicitement en formation. Souvent, les élèves découvrent de nouvelles connaissances à la suite d'une recherche plus ou moins courte d'après une activité plus ou moins robuste. Cette activité est en contexte. Deux scénarios alors se présentent, l'élève réussit mais n'identifie pas forcément la nouveauté ou l'élève n'aboutit pas à sa recherche : il devra alors dans l'idéal recommencer.

Dans ce modèle, la liberté est laissée de pouvoir réaliser autant de boucles que nécessaire jusqu'à ce que l'élève reconnaisse la connaissance en jeu à tous les coups. L'enseignant aide à cette prise de conscience et d'élaboration en proposant des activités dans d'autres contextes et en exposant des connaissances. Ce modèle pourrait favoriser alors la décontextualisation. Bien sûr, dans la pratique, le maître dans ce processus expose des connaissances, en produisant des énoncés plus ou moins formels. Il fait partie de ce processus comme acteur, l'une de ses contraintes étant de limiter le nombre de boucles car il est limité par le temps.

Schéma 3.


Enseignant
Élève(s)
Connaissance à transférer
N fois
Choisir un problème (contextualiser)
Problème
OUI
Connaissance Identifiée ?
NON
Résoudre le problème rapidement
Résoudre le problème « comme on peut »
Exposer les connaissances
Décontextualiser Dépersonnaliser
Exposition des connaissances
Connaissances en actes
Choisir un problème avec contexte différent
Connaissance transférée

Chapitre II – Problématique et méthodologie

1 Problématique

1.1 Rappel et articulation avec le chapitre 1.

Le chapitre 1 a été l'occasion de rappeler que dans la Théorie des Situations Didactiques, le Processus d'Institutionnalisation (PI) induit l'exposition de connaissances. Cette exposition se réalise lors de phases d'institutionnalisation suivant des situations de formulation voire de validation, éventuellement et idéalement après des phases d'action sur une situation liée à un problème adéquat mettant en jeu le savoir, inspiré d'une situation fondamentale.

Le PI est le processus qui conduit à transformer des connaissances utilisées voire élaborées dans une action, en savoir plus général. Brousseau (1998) définira assez tardivement dans la construction de la Théorie des Situations Didactiques qu'institutionnaliser signifie : dépersonnaliser et décontextualiser des connaissances. Une première partie de notre exposé (chapitre 1) a consisté à étudier ce qu'implique et signifie dépersonnaliser et décontextualiser dans l'action du professeur. Cette étude nous conduit à enrichir la définition première d'institutionnalisation. Pour nous, institutionnaliser ne se réduit pas à proposer des Expositions de Connaissances décontextualisées et dépersonnalisées. L'étude du contenu des EC va nous conduire à prendre à compte le niveau de généralisation et de formalisation et/ou de formulation des PE.

Nous avons expliqué pourquoi nous utilisons le terme d'Exposition de Connaissances comme Robert (2015). Les moments d'Exposition de Connaissances semblent indispensables pour dégager un statut, une légitimité et une permanence (chapitre 1) dans l'institution aux « *nouvelles connaissances* » des élèves. Se questionner sur ces moments conduit à interroger les modalités de « *transmission* » de ces connaissances. Peut-on constater des moments dédiés à l'Exposition des Connaissances ? Quelle est la place de l'écrit et de l'oral dans ce processus ?

D'autres travaux interrogent ce processus et montrent en quoi il est important que l'enseignant s'appuie sur la mémoire didactique de la classe (Brousseau & Centeno 1991). En effet il est utile au professeur pour mobiliser les connaissances, articuler connaissances anciennes et nouvelles de s'appuyer sur la mémoire collective de la classe. Pour cela, ils peuvent rappeler par exemple les situations qu'ensemble ils ont vécues et ce qu'ils en ont retenu. L'appui sur cette mémoire didactique permet d'aménager des étapes dans le PI.

Butlen & Pézard (2003) montrent le rôle important dans la conceptualisation d'étapes intermédiaires prises en charge grâce à l'écriture de textes intermédiaires. Les moments d'écriture de ces textes étaient des moments collectifs organisés par les enseignants et les chercheurs. Les échanges et la présentation de ces textes ont permis au plus grand nombre d'élèves de progresser dans la compréhension et la formulation de textes dont les énoncés devenaient de plus en plus généraux.

Coulange commente les travaux de Butlen et al (2004), elle constate également « un effacement des moments de formulation et d'institutionnalisation au profit de pratiques qui mettent en avant un « *étayage permanent* ». (Coulange, 2012 p76)
Dans un autre texte, Margolinas & Laparra (2011) ajoutent que « *Tout se passe comme si, le plus souvent, l'intention du professeur n'était pas déterminée en termes de savoirs, en tout cas pas précisément.* » (Margolinas & Laparra 2011, p.28).
Nous avons été confrontés à cette dispersion de l'institutionnalisation lors de nos premières expérimentations. Coulange (2011) s'interroge sur les choix de situations proposées aux élèves. Ce choix serait guidé :

> *« Par des préoccupations éloignées des savoirs et de leur épistémologie : comme les liens apparents des activités proposées avec du concret ou du transversal […] ou leur capacité visible à plonger et à maintenir les élèves en action, dans « du faire ». Le didactique est écrasé par de l'idéologique ou du doxique qui place au cœur des actions enseignantes d'autres priorités que les savoirs mathématiques ».* (Coulange 2011, p.44)

D'après Coulange, le projet du professeur serait davantage guidé par la nécessité de proposer des activités et de mettre en activité les élèves plutôt que passer du temps à dégager des savoirs décontextualisés et à les transmettre.
Cette dernière remarque et les résultats de ces auteurs, nous amènent à suivre des professeurs dont les actions a priori sont guidées par l'enseignement de la discipline et non par des scénarios inspirés par une idéologie pédagogique.
De plus nous avons établi deux dimensions du PI : la dimension sociale et la dimension cognitive. Le PI étudié revient à considérer deux autres processus qui le constituent : celui de PTG (sur un temps long) et celui du PCDR (sur un temps plus court). Pour atteindre le Processus de Transfert et de Généralisation (PTG), il nous faudra étudier ce processus pour une notion donnée et étudier ce que propose le professeur pour aider à la conceptualisation. Pour cela, nous pourrons regarder si le professeur propose des textes intermédiaires. Le PTG traverse les deux dimensions l'une alimentant l'autre et réciproquement. De même, l'étude du PCDR se fait dans les deux dimensions, nous pourrons alors décrire comment sont prises en charge la décontextualisation et la dépersonnalisation du savoir.
L'étude réalisée dans le chapitre 1 avait l'ambition de montrer que le PI est indispensable et constitutif de l'apprentissage. Pour autant la littérature récente en didactique soulève et constate les difficultés des PE[25] pour institutionnaliser. Cela nous paraît paradoxal puisque le concept d'institutionnalisation semblait « *constitutif* » des pratiques (voir chapitre 1)
Pour trouver des réponses ou des éléments de réponses, nous pensons qu'il faut d'une part regarder la « *nature des mathématiques à enseigner* » (chapitre 3) mais aussi identifier les systèmes de contraintes qui pèsent sur les pratiques lors des moments d'Exposition de Connaissances. Nous allons suivre des enseignants qui, malgré ces contraintes essaient d'institutionnaliser, c'est un autre axe de notre recherche, décrire comment ils font du mieux qu'il leur est possible de faire.
Cet effacement des moments d'exposition des connaissances pose une vraie difficulté méthodologique et amène la question suivante. Comment recueillir suffisamment de

[25] *PE pour Professeur des Ecoles.*

données pour reconstituer en termes de connaissances exposées ce qui est donné à voir et à entendre aux élèves ? Comment éviter des conclusions parfois hâtives : telles que les professeurs n'institutionnalisent plus ou pas assez car ils ne savent pas assez de mathématiques ? Est-ce établi que leur projet n'est pas nécessairement celui de la transmission des connaissances ? Quelle est l'échelle de l'étude du PI. Peut-elle être locale ou plus globale ? Faut-il rendre compte des deux échelles et en montrer les différents effets ?

Pour répondre à ces questions, il nous semble que choisir les professeurs devient une réelle question de méthodologie. En effet lorsque nous nous appuyons sur les résultats de Butlen et al (2012), dans leurs recherches à propos des pratiques enseignantes dans les classes défavorisées, ils identifient majoritairement des pratiques qui se caractérisent ainsi :

des scénarios ne présentant pas (ou très rarement) de problèmes consistants aux élèves, par des temps de recherche très réduits, par une baisse quasi systématique des exigences de la part du professeur, par une individualisation non contrôlée de l'enseignement, par la mise en œuvre d'une certaine forme de pédagogie différenciée rendant le plus souvent impossible l'existence de phases de synthèse et d'institutionnalisation.

Ces descriptions de pratiques majoritaires ont été déterminées à partir de pratiques d'enseignants débutants. L'effacement de l'institutionnalisation est- il seulement le fait de pratiques d'enseignants débutants ?

Butlen et al. distinguent d'autres enseignants débutants, très minoritaires, dont les pratiques se caractérisent par :

> *« Des scénarios basés sur des problèmes engageant les élèves dans une réelle recherche pendant laquelle le professeur n'apporte que des aides « techniques » sans abaisser ses exigences. Ces scénarios comportent quasi systématiquement des phases de mise en commun des procédures, de synthèse ainsi que des institutionnalisations locales plus générales. Les apprentissages comme les comportements sont traités collectivement. Le professeur est le maître du temps. Ce troisième i-genre correspond à une mise en actes dans un contexte de ce qui est davantage mis en valeur en formation initiale »* (Butlen et al 2012, p.26.)

Puisque certaines pratiques majoritaires semblent rendre impossible les phases de synthèse et d'institutionnalisation, il nous a semblé nécessaire de suivre des professeurs qui avaient des potentialités de faire partie du genre minoritaire et de pouvoir décrire quand il existe des moments d'exposition de connaissances voire un PI.

Nos questions de recherche sont alors les suivantes en ce qui concerne l'institutionnalisation en général : comment de tels professeurs des écoles prennent-ils en charge les moments d'exposition de connaissances ? Quelles sont leurs contraintes, quelles régularités et variabilités (Robert & Rogalski, 2002) pourra-t-on déterminer lorsqu'ils institutionnalisent (à leur sens comme au nôtre) ?

1.2 <u>Hypothèses.</u>

Nos hypothèses prennent en compte plusieurs contraintes du professeur qui pourraient expliquer les difficultés à produire des institutionnalisations. Nos hypothèses s'appuient sur

des résultats tels que ceux liées à « *l'étayage permanent* »(H0) de la part du professeur. Nous considérons ces hypothèses comme admises.
D'autres contraintes conduisent à penser d'autres facteurs limitant à ces difficultés d'institutionnalisation. Nous émettons les hypothèses suivantes que nous allons tester. Elles pourraient expliquer cet effacement d' « *exposition* » de connaissances au profit de l'obsession de la mise en activités.
H1 : l'assujettissement aux différentes contraintes institutionnelles et sociales, à certaines croyances pédagogiques peut être considéré comme une contrainte ou une ressource ou une raison pour le professeur pour produire un texte de savoir. (Chapitres 4 et 5)
H2 : H1 induit alors une grande variabilité des pratiques. (Chapitres 6,7,8)
H3 : les ressources utilisées par les PE ne les outillent pas suffisamment pour les aider à étayer leurs discours (à l'oral) et à proposer des écrits consistants réutilisables par les élèves. (Chapitres 4, 8)
H4 : Les choix imposés par les programmes pour enseigner certaines notions ne sont pas assez robustes (chapitre 3) pour permettre de généraliser et de proposer des textes décontextualisés et dépersonnalisés
H5 : institutionnaliser est une tâche soumise à un faisceau de contraintes qui rend celle-ci difficile.
Ainsi notre première hypothèse (H1) est du côté des contraintes institutionnelles et sociales du métier. Notre troisième hypothèse (H3) elle se place du côté du travail du professeur et de l'usage des ressources pour le PE. Enfin, la quatrième hypothèse (H4) est du côté de la construction du savoir par le PE pour les élèves. (H2) et (H5) sont du côté des pratiques.

1.3 Eléments qui permettent la description du processus l'institutionnalisation.

Notre travail de thèse consiste d'une part à décrire un processus et d'autre part à décrire et à analyser des pratiques qui participent à ce processus.
Afin de décrire un processus, nous devons déterminer sur quels types de données nous appuyer. Nous nous inspirons des définitions de ce qu'est un processus en informatique pour nous aider à circonscrire cela.
Pour décrire ce processus nous allons nous attacher à définir les acteurs, les moyens et les activités en jeu. Les acteurs ce sont les professeurs et les élèves. Les moyens sont tout ce qui permet de favoriser l'émergence et la conceptualisation d'une notion mathématiques comme : le choix de la ressource, les cahiers des élèves, les brouillons des élèves mais aussi les modalités de gestion de la classe qui favorisent ou pas les interactions entre les élèves. Enfin dans les activités en jeu, nous retrouvons les activités induites par les situations choisies par le professeur à destination des élèves, ainsi que tout ce qui se passe entre le professeur et les élèves qui impliquent une activité de l'un ou de l'autre. Ainsi les moments d'exposition des connaissances sont alors vus comme des activités conjointes des élèves et du professeur.
De plus, un processus, est un regroupement d'activités qui interagissent entre elles et transforment des éléments d'entrée en éléments de sorties. Dans le chapitre 1, nous avons montré qu'il existait un processus PTG (processus transfert et généralisation) qui encapsule au moins un processus de contextualisation décontextualisation recontextualisation (PCDR).

Ces deux processus traversent les deux dimensions de l'institutionnalisation. Dans notre construction théorique, une situation (au sens de Brousseau) est l'entrée dans ces processus d'apprentissage. Le texte de l'institutionnalisation est le livrable proposé par le maître alors que l'acquisition des nouvelles connaissances est la « *sortie* » du PI. institutionnaliser est une action pas toujours identifiable en s'appuyant sur (H0) alors que l'institutionnalisation est visible à certains moments de l'apprentissage.
Nous avons fait le choix d'étudier le Processus d'Institutionnalisation dans le cas particulier de l'enseignement des fractions. Nous allons justifier de ce choix dans la suite de notre chapitre.

2 Méthodologie.

2.1 De l'étude du Processus d'Institutionnalisation à l'étude du PI d'une notion précise.

Pour nous, le PI relève de deux dimensions : la dimension sociale et la dimension cognitive, nous l'avons signalé. Etudier la dimension sociale du PI, nous pousse à regarder les pratiques des PE lorsqu'ils exposent des connaissances mais aussi à envisager d'autres fonctions que celles annoncées en théorie. Par exemple les expositions de connaissances sont peut-être des moyens de régulation. Les expositions de connaissances permettraient de montrer ce qu'il y avait à voir de manière parfois assez économique pour le professeur. De plus, les EC pourraient à la fois réguler le temps didactique (accélération) mais aussi les donner à voir aux élèves qui n'avaient pas identifié les savoirs en jeu.
Etudier la dimension cognitive du PI, nous conduit à étudier plus précisément le PTG et les PCDR, pour cela, il nous faut recueillir des données suffisantes pour reconstituer au moins le PCDR c'est-à-dire des éléments qui illustrent la chaîne « *contextualisation, décontextualisation, recontextualisation* ». C'est pourquoi dans cette perspective, il est difficile d'étudier le PI en dehors d'une notion précise. Les premières expérimentations et données extraites du terrain vont confirmer ce choix. La construction de notre méthodologie s'est appuyée sur la recherche des conditions favorables de l'existence du PI.

2.2 Une méthodologie en appui sur des premières expérimentations.

Nous avions en premier lieu réalisé une première expérimentation dans la continuité de notre mémoire de master. Nous allons en rappeler les grandes lignes et résultats. Cette première année nous voulions dépeindre de manière globale les grandes lignes du PI. Pour cela, nous nous sommes d'abord attachée à l'étude des recueils de leçons et à l'observation de deux séances en mathématiques dans différents niveaux de classes. Les recueils de leçons étaient considérés comme une mise en « *ostensif* » des institutionnalisations. Brousseau & Centeno (1991) donnent une définition du recueil de leçons. Pour eux ce cahier « *est la mémoire officielle de la classe* », mais aussi « *ce que l'élève est obligé de savoir, c'est-à-dire le résultat de l'institutionnalisation des savoirs exigibles en classe* ». Cette définition de ce cahier lui confère un rôle très important dans le PI, il est le résultat des « *savoirs exigibles en classe* ».
En nous appuyant sur la définition des cahiers de leçons, nous avons suivi 6 classes de professeurs de CE1 (2 fin de cycle 2) ou de CM2 (5 fin de cycle3).

Nous avons recueilli leurs cahiers de leçons et nous sommes allée les voir tous, deux fois dans leur classe. Notre travail de mémoire a consisté à comparer les écrits de ces cahiers et à en définir leur degré de décontextualisation. Les textes de ces cahiers étaient contextualisés et comportaient de nombreuses références à l'activité d'introduction.
Dans cette expérimentation zéro, nous n'avions pas choisi d'étudier en particulier une notion. Les résultats à partir des recueils de leçons nous ont permis par la suite d'adapter et d'adopter la méthodologie de notre étude.
Le premier résultat est le faible nombre de leçons écrites pour un même niveau. Le nombre de leçons est en moyenne d'une quinzaine de leçons pour l'année sauf pour la classe d'Eugénie. Eugénie a à la fois une solide formation en mathématiques (admise au CAPES de mathématique en 2009) mais aussi en didactique (par des lectures).
Le deuxième résultat est le faible nombre de leçons communes entre les PE pour un même niveau (entre les enseignantes de CM2 et pour le CE1). Ces enseignantes ne sont pas débutantes au moment de notre étude. Au cours de celle-ci Eugénie devient professeur de mathématiques au collège. Solène, Stéphanie, Gwen et Sasha deviennent maîtres formateurs. Marie, quant à elle, devient maître spécialisée en SEGPA[26]. Ces professeurs ont des routines et ont une gestion de classe suffisamment assurée ce qui leur permet d'enseigner dans des conditions favorables (climat de classe serein) pour elles et pour les élèves.
De nouveau, nous sommes conduite à constater une rupture entre ce qui semble indispensable au PI dans la Théorie des Situations Didactiques et ce que nous constatons dans les classes suivies.
Ces résultats sont en résonance avec ceux déjà cités, le peu de leçons écrites laisse effectivement penser que les EC écrites ne sont pas la clé de voûte du PI. Ce qui est certain c'est que chaque notion du programme n'est pas systématiquement associée à une exposition écrite de connaissances. Les professeurs font des choix et nous cherchons à savoir ce qui motive la production ou non d'EC écrites. Nous avons obtenu des réponses à cette interrogation. Nous nous sommes appuyée sur ces réponses pour établir notre méthodologie actuelle.

2.2.1 *Une notion « nouvelle » au regard des programmes induit-elle une exposition écrite de la connaissance ?*

D'un professeur à un autre, pour un même niveau de classe, les institutionnalisations écrites ne sont pas nécessairement produites sur les mêmes parties du programme. Ou bien encore, nous constations que toutes les parties du programme ne déclenchent pas chez l'enseignant une institutionnalisation écrite. Enfin, en nous appuyant sur la définition de Brousseau et Centeno (op.cit) nous pouvons en déduire que ce qui est exigible d'une classe à une autre pour un même niveau n'est pas nécessairement commun.
Nos questions se précisent et nous nous demandons pourquoi un enseignant proposerait des leçons sur le nombre et le calcul et pas en géométrie. Nous nous demandons pourquoi pour un même niveau de classe pour une même notion, nous pouvions disposer ou non d'une EC écrite.

---

[26] *Au collège, les sections d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA) accueillent des élèves présentant des difficultés d'apprentissage graves et durables. (Citation extraite d'Eduscol : http://eduscol.education.fr/cid46765/sections-d-enseignement-general-et-professionnel-adapte.html)*

Les raisons annoncées étaient très différentes, pour certains il est inutile d'écrire une leçon sur une notion travaillée les années antérieures (Solène) ou il est inutile d'écrire des leçons sur des techniques opératoires car ces dernières étaient assez entrainées (pour 4 enseignantes de notre expérimentation zéro).
Stéphanie avance qu'il est inutile d'écrire des leçons en géométrie car il suffit de faire beaucoup de constructions pour acquérir le vocabulaire et les notions. L'écriture d'un texte est souvent liée, d'après ces enseignants, à la « *nouveauté* » de la notion.
L'un des critères annoncé par les PE qui semblait conduire à l'écriture d'une exposition écrite des connaissances était la prétendue nouveauté de la notion. Cependant, nous discutons ces déclarations. En effet dans les différents recueils consultés (et suite à des questions posées par nous en formation continue), nous retrouvions en cycle 3 (CM1 ou CM2) des textes traitant des fractions pour tous les cahiers de leçons consultés. Cependant, nous constations qu'il n'y avait pas de textes traitant de la proportionnalité. Le facteur « *nouveauté* » n'implique donc pas nécessairement une institutionnalisation écrite. La proportionnalité est aussi une nouvelle notion du cycle 3, pour autant sur les 4 recueils de CM2 consultés, une seule enseignante (Sasha) produit des institutionnalisations écrites sur cette notion. En revanche, les EC sur les fractions semblaient systématiquement faire l'objet d'une EC écrite. C'est pourquoi cette notion nous a semblé être une bonne candidate pour notre projet.
Les déclarations des professeurs sur ce qui a priori les conduit à produire des EC écrites et le nombre assez faible d'EC produites dans l'année alimentent notre hypothèse H5 : institutionnaliser n'est pas une tâche si simple.

2.2.2 Un exemple d'expositions de connaissances écrites sur les fractions et les questions que cela soulève.

Les deux leçons ci-dessous représentent **toutes** les leçons sur les fractions sur une année complète, suivront des leçons sur les nombres décimaux. Ce qui est institutionnalisé est la lecture et l'écriture des fractions à partir d'exemples ainsi que des règles permettant de comparer une fraction à l'unité. Les liens entre les différentes parties de la première leçon ne sont pas explicites. La fraction est présentée comme un nombre et décrite de manière naturaliste « *la fraction est composée de deux parties* », le vocabulaire de numérateur et dénominateur est introduit en proposant une définition : « *le numérateur est le nombre de parts utilisées* ». Le dénominateur est « *le nombre de parts de l'unité* » Les mots « *parts utilisées* » renvoient sûrement à une situation dans un contexte donné. Pour vérifier cela, nous avons regardé la séance filmée. Dans les exercices présentés, les élèves avaient à déterminer le nombre de parts grisées (représentations de rectangles, de disques divisés en parts égales) sur le nombre total de parts.
La deuxième partie de la leçon présente une bande dont une partie est grisée. Le texte en dessous permet d'illustrer ce dessin « *mon unité (camembert, bande) est divisée en 5 parts, j'en prends 4* », il faut alors comprendre que le $\frac{4}{5}$ au-dessus de la bande est la réponse de cette phrase. Cette leçon est difficile à lire dans le sens où les allers retours entre la représentation de la bande, le texte et la définition sont incessants. De plus, la référence à l'unité (camembert, bande…) renvoie non explicitement à des activités de classe où plusieurs formes et grandeurs de l'unité auraient été vues.
Ce texte essaie de généraliser en donnant des définitions « *la fraction est un nombre* », mais avec ce seul texte, nous ne pouvons rien déduire sur les proximités entre institutionnalisation et tâches effectives. Par ailleurs il comprend de nombreux exemples

pour apprendre à lire les fractions les plus usuelles mais c'est aux élèves de faire les généralisations. Ainsi *« $\frac{1}{3}$ se lit un tiers, $\frac{5}{3}$ se lit cinq tiers »*, les élèves doivent déduire que toutes les fractions dont le dénominateur vaut 3 se lisent en nommant d'abord le numérateur puis en lisant « *tiers pour un dénominateur égal à 3* ».
L'étude de ce simple texte, ne nous permet pas de décrire dans sa globalité le PI, il permet juste de poser des questions sur l'utilité et l'usage potentiel d'un tel texte et sur les difficultés de lecture. L'étude de ce texte écrit ne renseigne pas la dimension sociale du PI et à peine la dimension cognitive. Nous ne savons pas quelles situations ont été proposées, ni ce qui a été dit.
Ajoutons que la lecture d'un tel texte n'est pas aisée car elle ne s'accompagne pas d'un discours méta. Quel sens donner aux flèches ? Est-il naturel de faire les liens entre le « *numérateur* » écrit à gauche et « *le nombre de parts utilisées* » ? Est-il aisé de comprendre que la bande en partie coloriée renvoie à la phrase en dessous mais décalée (vers la gauche) par rapport à la bande ?
Exemple : leçons sur les fractions extraites du cahier de Gwen (cf chapitre 8).

N2 Les fractions

1)Lire et écrire des fractions.

• Une fraction est un nombre. Elle est composée de deux parties :

le numérateur → $\quad 4 \quad$ ← le nombre de parts utilisées
$\quad$-----
le dénominateur → $\quad 5 \quad$ ← le nombre de parts de l'unité

Mon unité (camembert, bande…) est divisée en 5 parts, j'en prends 4.

• $\frac{1}{2}$ se lit : un demi $\quad$ $\frac{3}{2}$ se lit : trois demis $\quad$ $\frac{1}{3}$ se lit : un tiers $\quad$ $\frac{5}{3}$ se lit : cinq tiers

$\frac{1}{4}$ se lit : un quart $\quad$ $\frac{3}{4}$ se lit : trois quarts $\quad$ $\frac{7}{10}$ se lit : sept dixièmes $\quad$ $\frac{9}{5}$ se lit : neuf cinquièmes

N2 2) Dire si une fraction est supérieure, inférieure, ou égale à 1.

• Une fraction est **supérieure** à 1 quand le numérateur est plus grand que le dénominateur. ($\frac{7}{3} > 1$)

• Une fraction est **inférieure** à 1 quand le numérateur est plus petit que le dénominateur. ($\frac{2}{15} < 1$)

• Une fraction est **égale** à 1 quand le numérateur est égal au dénominateur. ($\frac{16}{16} = 1$)

Le choix de suivre des enseignants sur la totalité de leur séquence d'apprentissage s'est imposé pour « *traquer* » au plus juste possible les expositions des connaissances qui semblent être réalisées le plus souvent à l'oral. Il est assez difficile de penser que ces deux textes constituent l'ensemble des expositions des connaissances sur les fractions. Pour autant les séances que nous avions suivies, pour cet enseignant, ne nous avaient pas permis d'observer des temps forts liés aux EC. Ces premières observations et recueil de données de nouveau alimentent l'hypothèse H5 : institutionnaliser n'est pas une tâche si simple. Nous ajoutons qu'organiser les observations et le recueil de données pour décrire le PI nous semble alors un vrai défi.
Etudier l'institutionnalisation est indissociable de l'étude des pratiques effectives. C'est pourquoi, nous pensions judicieux de réaliser une étude comparative sur un temps long des pratiques des PE, pour une notion précise. Le niveau choisi est le CM2 car c'est dans ce niveau que nous avions relevé le plus de leçons écrites. De plus ce niveau, nous assure des

proximités avec le contenu mathématique de la classe de sixième et nous permettra d'en effectuer une comparaison (chapitre 8). Ces choix devraient nous permettre de dégager des variabilités et des régularités pour quatre enseignants.
Enfin notre expérimentation zéro, nous a permis de sélectionner des leçons sur le même thème. Seul l'enseignement des fractions et les décimaux avait induit des traces écrites de la part des 5 enseignants suivis cette année-là. Choisir d'étudier le PI pour le cas des fractions s'est imposé au regard de la littérature en didactique sur ce champ.

2.2.3 Choix des enseignants.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent qu'observer des moments d'exposition de connaissance n'était pas simple. Nous avions la possibilité de suivre des enseignants expérimentés (plus de 5 ans d'expérience), soucieux de mieux comprendre leur pratique et les effets de cette dernière. Nous avions constitué des groupes de pairs (enseignants de CM2 et de CE1) qui vivent un moment « *crucial* », tous souhaitant passer dans l'année ou l'année d'après le CAFIPEMF (Certificat d'Aptitude aux Fonctions de Professeur des Ecoles Maîtres Formateurs). Ils expriment un désir de comparer leurs pratiques et d'échanger afin d'accéder à une pratique réflexive de leur métier. Ces professeurs pour nous, pouvaient avoir des potentialités d'appartenir au genre minoritaire défini par Butlen. Les pratiques de ces professeurs avaient de grande chance de se rapprocher des « *modèles* » de pratiques enseignés en formation initiale, c'est-à-dire des professeurs qui choisissent des situations robustes, qui assurent la dévolution d'une situation, régulent et institutionnalisent.

Nous avons organisé de manière pragmatique notre recueil de données sur l'institutionnalisation. Pour obtenir des données, nous avions besoin d'étudier des pratiques de professeurs qui <u>institutionnalisent.</u> Institutionnaliser n'est pas simple à l'école donc il semble indispensable de suivre des classes dont la paix scolaire était assurée. Pezard (2010) définit la paix scolaire ainsi : *« nous définissions la paix scolaire comme le couple « paix sociale » et « adhésion au projet d'enseignement du professeur »*. Pezard (op cit) explique ce qu'est l'adhésion des élèves au projet d'enseignement en ces termes :

> *« L'adhésion des élèves au projet d'enseignement du professeur se manifeste par un climat de confiance, voire de complicité, entre les élèves et le professeur, par un enrôlement rapide, sans trop de résistance, des élèves dans les tâches. Cette adhésion est globale mais se trouve réinitialisée au niveau local dans le quotidien de la classe. ». (Pezard 2010, p.209)*

C'est pourquoi nous avons fait le choix de suivre des professeurs dont les rapports déclarés avec les mathématiques étaient bons, des professeurs suffisamment expérimentés pour assurer une bonne gestion de classe. Afin d'augmenter les potentialités d'observation de pratiques du genre minoritaire[27] nous nous sommes attachée à suivre des professeurs des écoles qui souhaitent devenir ou sont, à la suite d'un examen, maîtres formateurs. Nous cherchons finalement à étudier le PI dans les conditions qui nous semblent les plus favorables possible pour que celui-ci existe.

[27] C'est-à-dire des enseignants qui proposent des situations robustes, et des phases de synthèses et des phases d'institutionnalisation.

2.3 Une méthodologie qui prend en compte les caractéristiques des enseignants :

2.3.1 Caractéristiques des candidats suivis.

Tous les candidats suivis (expérimentation zéro et expérimentation de la thèse) ont passé et ont réussi le CAFIPEMF. Les modalités de cet examen changent en 2015 (Bo du 23 Juillet). Il est maintenant proposé, sous ces nouvelles modalités, dans le second degré. L'institution souhaitant se constituer un « *vivier* » de formateurs.
5 des 6 candidats[28] que nous avons suivis ont présenté une séance en mathématiques.
Les candidats ont proposé respectivement pour :
Solène : mathématique et histoire
Sasha : mathématique et histoire
Gwen : mathématique et sciences (académie de Versailles)
Julien : mathématiques et EPS
Samia : anglais et histoire
Stéphanie B : mathématique et histoire (académie de Rouen)
Marie qui ne passera pas finalement le CAFIPEMF.
Solène, Sasha, Gwen, Julien ont réussi toutes les épreuves de cet examen en une seule session. Seules, Samia et Stéphanie ont échoué une première fois à l'épreuve d'admissibilité. Stéphanie est la seule à avoir proposé un mémoire en mathématiques, jugé très peu satisfaisant la première année. Son deuxième mémoire portera sur l'anglais. Samia propose un mémoire en anglais, Julien en Education physique et sportive (EPS), Gwen en sciences, Solène sur l'orthographe et Sasha sur la production d'écrits. Seul Julien, licencié en Staps, obtiendra une excellente note à son mémoire portant sur un domaine de l'EPS : l'acrosport.
Gwen, Julien, Solène et Sasha ont obtenu les notes de 16 pour l'un et de 17 pour les deux autres aux épreuves d'admissibilité (pour être admis la note doit être supérieure à 15). Ces notes sont au-dessus de la moyenne des candidats[29]ou dans la moyenne des candidats
Julien, Sasha et Solène ont un bon rapport avec les mathématiques, lors de leurs examens, le jury s'est plus intéressé à la deuxième séance moins réussie (Histoire pour Solène et Sasha, EPS pour Julien) qu'à la séance de mathématiques. Au minimum nous pouvons penser que les séances proposées correspondaient aux attentes du jury. Sasha parle de ses séances comme des séances « *types* » qui ne correspondent pas au quotidien de la classe. Elle entend par là qu'elle a montré au Jury des séances qui ne correspondent pas au quotidien de sa classe (elle présente seulement des séances introductives, les élèves travaillent en groupe et les séances durent maximum 45 minutes).
À l'issue de cet examen, les professeurs admis sont reconnus experts. En nous appuyant sur Margolinas & Lappara (2013) ce que nous retenons de la complexité du travail de

[28] *Nous avons changé les prénoms des candidats, les prénoms Solène, Sasha, Samia, Eugénie et Stéphanie désignent des enseignantes et Julien et Gwen des enseignants.*

[29] *Sources provenant des délibérations du Jury :*
Admissibilité 2014
Moyenne des candidats : 14,68
Moyenne des admissibles : 15,62
Admissibilité 2013
Moyenne des candidats : 14,47
Moyenne des admissibles : 16,21

l'enseignant c'est que: « *L'idéal serait donc un professeur qui pourrait s'adapter à la demande de chacun* » (Thomazet & Margolinas, 2005). Bien entendu, le rôle du professeur est de transmettre des connaissances, mais également des capacités et des attitudes, dans ce contexte, pour des professeurs polyvalents, comme le sont les PE, la transmission des savoirs apparait comme un des éléments parmi tant d'autres du travail attendu par la société, mais pas nécessairement le plus central. »
Tochon (1993), quant à lui, en s'appuyant sur les écrits de Shön, propose la définition suivante que nous reprenons : « *l'expert est un professionnel qui réfléchit sans cesse sur la base des images des cas intériorisés par l'expérience* ».
Cette définition nous convient car semble proche de celle attendue par l'institution, un expert serait riche d'expériences et s'appuie dessus pour bâtir ses séances de classes, mais aussi pour réagir à chaud et improviser. Il n'est pas un modèle à imiter stricto sensu mais il peut parler des pratiques.

2.3.2 Un premier obstacle à notre méthodologie

Samia et Stéphanie B ont obtenu leur examen en 2012, Solène, Gwen, Sasha en 2013 et Julien en 2014. Seule Samia n'a pas proposé de séances en mathématiques.
La première difficulté est attachée aux connaissances parfois peu assurées des professeurs en mathématiques.
Pour Samia, lors de mes premières visites, les erreurs commises en mathématiques étaient nombreuses. Par exemple, nous allons montrer le type d'erreurs possible lors d'une séance sur l'apprentissage de l'algorithme de la division.
Exemple : Le cas de la division de 134 par 12 (division à effectuer au centième) :
Plusieurs élèves vont effectuer des divisions, Samia sous chacune d'elles écrit en ligne les résultats. Nous en donnons un exemple.
134= (11.16x12) + 8 au lieu de 134=(11.16x12)+0.08.
Puis Samia institutionnalise à partir de plusieurs exemples que le reste dans une division au quotient décimal est toujours un entier.
Nous avons recueilli pour elle trois séances filmées sur les mathématiques et une en grammaire. Dans ces 4 séances (y compris celle de grammaire) les erreurs notionnelles étaient assez systématiques. Samia utilise un manuel mettant peu en avant la résolution de problèmes mais favorisant de nombreuses séances d'exercices systématiques. Nous n'avons pas gardé Samia dans notre étude. Bien entendu, nous aurions pu suivre la manière dont elle accompagnait l'ancrage du nouveau dans l'ancien, comment elle faisait vivre les moments d'expositions de connaissances. Mais, pour nous, le nombre d'erreurs mathématiques et le choix du manuel nous questionnent sur les connaissances mathématiques et didactiques du professeur. Il nous était alors difficile de trancher lors des premières analyses pour savoir si les difficultés liées à l'institutionnalisation s'expliquaient par des mauvaises connaissances mathématiques et/ou didactiques ou si les difficultés étaient de même nature que les autres PEMFS. Quoi qu'il en soit, il semble difficile de proposer des EC si les connaissances mathématiques sont faibles et si les ouvrages niveau CM posent parfois problème à l'enseignant. Pour notre étude, nous suivons les classes de Solène, Sasha, Julien et Gwen. Les deux enseignantes ont 15 ans de carrière et les deux enseignants 5 et 6 ans.
Tochon (op.cit) ajoute que la formation académique et l'aisance dans une discipline sont à prendre en compte comme facteur d'expertise. Ainsi l'aisance dans la discipline

> *« semble expliquer leur aisance à adopter les plans aux événements soudains de la classe. Des larges connaissances de la discipline libèrent l'enseignant des préoccupations liées à l'organisation des contenus et lui permettent une réceptivité qui sera également un facteur d'expertise ».* (Tochon 1993, p.134)

Cette analyse de Tochon, confirme notre choix d'avoir écarté de notre étude les enseignants dont les connaissances disciplinaires n'étaient pas assurées.

2.3.3 Vulgate pédagogique : la mise en activité : un obstacle pour le recueil de données.

Une « obsession »[30] relayée par l'institution.

Les deux enseignants (Sasha et Solène) suivies sur un temps long ont obtenu le CAFIPEMF. Cette réussite assure qu'elles ont su proposer des séances qui correspondaient à des critères institutionnels attendus. Nous n'avons pas la grille d'évaluation de cet examen à notre disposition. Cependant notre propre expérience de membre du jury[31] nous permet de dire que les jurys apprécient que les élèves soient en activité, travaillent en groupe et que le professeur sache s'effacer en classe et avoir un regard réflexif sur sa pratique (argumenter sur ces choix pédagogiques, sur ses prises de décisions). Les jurys étant composés de 5 membres, les regards portés sur la pratique du PE sont multiples, l'admissibilité à cet examen assure que la paix scolaire soit installée. Nous avons recueilli les témoignages de deux conseillères pédagogiques qui ont aidé des candidats à passer cet examen. Ces deux conseillères expliquent que ce qui est attendu c'est de voir des élèves en activités, même si parfois cela génère un peu de bruit. Les deux conseillères apprécient que les candidats montrent qu'ils ont des connaissances didactiques

> *« J'ai dû aller à 3 ou 4 CAFIPEMF, et encore.... Par contre, j'ai aidé pas mal de candidats à le présenter (et à le réussir)... Je désirais une (ou 2 séances) d'apprentissage (pas de séance d'entraînements), <u>des séances où l'on voyait les élèves participer, prendre la parole, apprenant quelque chose, le maître sachant leur laisser la place, se poussant du tableau, sachant se taire, rebondir sur quelque chose pas forcément prévu, mettant de côté ce qui ne servait pas sa séance</u>.... Mais je leur disais aussi qu'ils pouvaient "rater" leur séance du moment qu'après, pendant l'entretien, ils sachent revenir sur ce qu'ils avaient vu d'eux-mêmes, donc je demandais aussi d'être capables d'avoir une "supervision" de soi en train d'agir sans forcément se complaire dans l'apitoiement, ni se fustiger, mais sachant prendre du recul et sachant prendre sa séance comme un sujet d'étude extérieur à soi.... (Même si la personne est impliquée dans une séance). Je n'exigeais pas forcément qu'ils sachent me citer tous les bouquins de tous les didacticiens ayant bossé sur leur séance, mais je m'énervais quand je sentais qu'ils n'avaient pas un peu creusé dans ce domaine quand même....*

---

[30] *Obsession est connotée, nous essayons de rendre compte de l'importance réelle donnée à l'activité relayée par l'institution et en général par les acteurs du terrain.*

[31] *Nous avons au moins suivis une dizaine de candidats pour la constitution des mémoires mais aussi en tant que membre de jury.*

> *Bien sûr, une séance sans "bordel" était appréciée.... mais le "bruit" constructif ne me gênait pas... »* (mail envoyé le 20/03/2015)

La deuxième collègue à la suite de la première répond :

> *« Je n'ai pas grand-chose à rajouter à ce qu'a dit Brigitte. Ou, au niveau des attendus : des élèves qui construisent leurs apprentissages. Une phase d' "institutionnalisation" à la fin de la séance (faire reformuler par les élèves ce qu'ils ont appris au cours de la séance). <u>De la différenciation, quand c'est nécessaire. Concernant ma participation à des jurys de CAFIPEMF, j'en ai vu plusieurs dont certains n'ont pas franchi le 1 er tour (!) car cours magistral, activités ne demandant pas aux élèves de réfléchir vraiment, ou encore des activités trop bien lissées,</u> et en questionnant les élèves, on apprend qu'ils avaient déjà fait la même chose! En plus de lectures sur la didactique de la discipline, j'ajouterai qu'il faut aussi que le candidat connaisse les courants pédagogiques et celui (ou ceux) dont il se revendique dans sa classe. ».* (mail envoyé le 20/03/2015)

Le deuxième témoignage nous permet d'avoir une définition de ce que l'institutionnalisation semble être : « *une phase de reformulation prise en charge par les élèves de ce qu'ils ont appris* ». Ce deuxième témoignage est précieux car cette conseillère termine une thèse en sciences de l'éducation sur les gestes professionnels en construction des PE stagiaires. Elle est aussi formatrice dans une ESPE, et sûrement est-ce une partie de la définition qu'elle peut proposer en formation.
Dans l'introduction de ce chapitre, nous nous sommes appuyée sur des résultats d'autres chercheurs qui mettaient en avant que la mise en activité et l'étayage permanent prenaient le pas sur l'institutionnalisation. Les deux témoignages ci-dessus montrent que cette mise en activité et l'effacement du professeur sont des attendus pour réussir cet examen.
Il y a donc un fait culturel de la profession qui est de reconnaitre positivement et de mettre en avant de telles pratiques.
Filmer des séances qui n'ont pas ces caractéristiques, filmer l'ordinaire des classes a été difficile. Nous avons peu de données filmées sur Stéphanie car elle était très réticente et ne souhaitait pas être filmée. Marie finalement ne passera pas le CAFIPEMF mais choisira de passer un examen pour devenir maître spécialisé (maître F : pour enseigner en SEGPA), elle n'a jamais accepté d'être filmée. Nous l'avons donc écartée de nos analyses. Enfin Sasha, après bien des discussions a accepté d'être parfois filmée (chapitre7).
Filmer les pratiques ordinaires de professeurs reconnus n'est pas aisé, l'expression de ces réticences est à interroger. Cela nous a conduits à proposer « *un contrat* » sur lequel nous allons revenir.

Une « obsession » qui conduit à établir un contrat qui fait partie de la méthodologie.

Les enseignants de notre étude ont accepté d'être filmés dans leur quotidien à condition que les vidéos ne soient pas diffusées en formation. Certains de nos étudiants pouvant être leurs stagiaires, cela posait des questions d'éthique. Nous avons discuté longuement pour faire comprendre que les séances d'entrainement, de différenciation, d'évaluation avaient aussi un intérêt. Ce que nous comprenons de nos échanges, c'est que le quotidien de leur classe, ne correspond pas exactement à ce qu'ils ont montré le jour de leur examen. C'est une des raisons (ce n'était pas la seule) pour laquelle plusieurs des PEMF[32]s ont des difficultés à se filmer sur des séances dites de réinvestissement. Montrer l'ordinaire de la classe peut être difficile pour ces professeurs reconnus par la profession.

L'ordinaire d'une classe :

Nous avons suivi ces enseignants sur un temps qui va de 1 an (Julien) à 3 ans (pour Sasha et Solène). En dehors de cette période d'examen, ces PEMFs préparent la classe. Ces préparations sont assez différentes de celles du CAFIPEMF, la contrainte, dans le quotidien n'est pas de réussir un examen mais bien de faire la classe. Faire la classe c'est répondre et parfois subir d'autres contraintes qui agissent sur les pratiques de ces professeurs. L'examen du CAFIPEMF conduit les trois candidats à réaliser des séances non ordinaires dans le sens où leurs temps de préparation sont conséquents par rapport à l'ordinaire.

Ces trois PEMFs, déclarent passer des heures en préparation mais dans un temps moindre que pour les séances du CAFIPEMF. Ils estiment souvent ne pas avoir le temps de préparer comme ils le souhaiteraient car d'autres tâches viennent alourdir leurs temps de travail et les détournent parfois de leurs tâches d'enseignement (correction des cahiers – 1h30 par jour en moyenne en CM2), rédaction des PPRE[33], préparation de l'aide individualisée, préparation des évènements plus festifs de l'école - kermesse, rencontres sportives, classes découvertes…-)

Dans leurs quotidiens, ils ne font pas systématiquement des fiches de préparation type fiche du CAFIPEMF (annexe 20). En revanche, leurs cahiers journaux sont préparés et détaillés. Les cahiers journaux sont des outils du professeur dans lesquels est décrite la succession des disciplines dans la journée et dans la semaine, les objectifs visés et des éléments du déroulement. Ils déclarent passer du temps à faire et refaire des exercices d'entraînement en mathématiques.

Mise en activité et institutionnalisation : un lien qui ne semble pas aller de soi.

Dans un courriel et une conversation associée, Sasha nous explique que nous avions annoncé que nous travaillerions sur les institutionnalisations et ne comprenait pas pourquoi les séances introductives et d'entraînements nous intéressaient. Notre objet d'étude a été assimilé par elle, à des traces écrites (interprétées ainsi par l'enseignante et non explicitées par nous). Ce malentendu explique également que l'enseignante essayait de nous montrer ce qui correspondait à notre « *commande* ». Sasha pensait que seuls les moments dédiés aux EC écrites étaient importants pour nous. Ce malentendu soulevé et éclairci nous avons pu observer des séances plus ordinaires.

Nous avons fait en sorte de favoriser le plus possible les échanges entre chercheur et enseignants. Nous voulions le plus possible accéder à leurs représentations en général du métier et tout particulièrement à leur prise de position sur le rôle des moments d'expositions des connaissances dans leur classe. Institutionnalisent-ils pour suivre un modèle transmis en formation ou parce qu'ils sont convaincus de l'utilité pour les élèves de ces moments ?

[32] *Nous écrirons PE pour professeurs des écoles, ceux de notre étude étant en possession du certificat de professeur des écoles maitres formateurs nous écrirons aussi PEMFs sans qu'il y ait pour nous de distinction.*

[33] *Programme personnalisée de réussite éducative.*

Nous pouvons considérer qu'une part de notre méthodologie emprunte des aspects de la recherche collaborative décrite par Desgagné & Bednarz (2005) dans le sens où nous ne travaillons pas sur les pratiques des enseignants mais avec. Nous répondons à leurs sollicitations et nous leur faisons lire les transcriptions des interviews réalisées quand ils sont demandeurs. Notre intention est collaborative, pour autant notre recherche n'est pas une recherche collaborative stricto sensu. Certains enseignants collaborent plus aisément que d'autres, c'est ainsi que Sasha a longtemps refusé de voir les films mais aussi de lire les transcriptions. Nous avons soumis le plus souvent possible une partie de nos analyses afin de recueillir leurs réflexions. C'est pourquoi parfois, nous notons la date d'un rendez-vous ou d'un mail quand nous citons nos échanges. Enfin une partie de nos entretiens n'est pas enregistrée et dans ces cas-là nous les avons retranscrits et soumis aux enseignants de l'étude.
Sur la base des travaux de Schön (1983), l'enseignant est considéré comme un praticien réflexif, possédant une rationalité, souvent tacite, sous-jacente à ses actions et compréhensions. La recherche collaborative s'efforce de dégager cette rationalité, de la mettre à jour. Elle s'intéresse à saisir les compréhensions des situations d'enseignement-apprentissage et le jugement en contexte du praticien, pour mieux comprendre les connaissances liées à la pratique d'enseignement. Proulx (2013) cite Bednarz.

> *« C'est en effet ici le processus de constitution de ces situations, leur transformation, la manière dont les enseignants font sens de ce qui se passe avec les élèves dans ces situations, la manière dont ils les transforment, les arguments à l'appui de ces transformations, la rationalité de l'acteur, les ressources à l'œuvre dans cette constitution qui intéressent le chercheur. »* Proulx (2013, p329)

Notre contrat est ainsi défini : les vidéos ne sont pas destinées à la formation mais nous pouvons en utiliser des extraits audios ou des transcriptions, nous faisons lire ce que nous écrivons et nous insérons s'il y a des points de discussion, les remarques sur nos analyses.
Ce contrat établi, nous avons eu accès au quotidien de leur classe.

2.3.4 Que peut signifier « pratiques expertes » dans la recherche ?

Ces définitions sur l'expertise de Tochon et les caractéristiques des i-genres (chapitre 1) sont à mettre en perspective. Le i-genre 3, minoritaire, défini par Butlen et al (2012) nous offre la description d'un professeur expert pour des chercheurs, capable de choisir des situations ayant un potentiel a-didactique, assurant la dévolution et l'institutionnalisation des connaissances, mais sachant aussi hiérarchiser les procédures et ayant des connaissances didactiques suffisantes pour gérer du point de vue mathématique les moments d'improvisation. Il semble qu'il ne soit pas possible de vérifier l'ensemble de ces critères sur une séance. C'est là une différence notable avec l'examen du CAFIPEMF, celui-ci évalue au regard de deux séances sur deux disciplines. Butlen et al (op.cit) se gardent toutefois d'assimiler les pratiques du i-genre 3 avec une pratique d' « *expert* », pour ces auteurs, ce modèle correspond au modèle « *enseigner en formation* » et que les enseignants essaient d'atteindre.
Pour autant les critères du terrain et de la recherche se retrouvent lorsqu'il s'agit de la paix scolaire. Tant que celle-ci n'est pas établie, il n'est pas garanti que les apprentissages puissent avoir lieu dans des conditions favorables.

Ce que nous retenons des professeurs suivis, c'est leur très grande implication dans leur travail au regard des préparations écrites souvent réactualisées d'une année sur l'autre, de la tenue de la classe et du soin apporté aux corrections. Ils sont jugés experts par l'institution au vu de deux séances d'apprentissages et de la constitution d'un mémoire. En revanche nous ne pouvons pas encore à ce stade de notre exposé dire de quels i-genres ils relèvent.

2.4 Des ressources utilisées communes conseillées en formation.

Trois des quatre enseignants de notre étude utilisent de manière privilégiée voire exclusive (Sasha et Solène) les mêmes ressources. Ces ressources sont souvent conseillées en formation (Allard & Ginouillac, 2014) : EuroMaths, ERMEL, Cap Math. Elles ont comme point commun d'avoir de forts ancrages didactiques.

Dans l'extrait ci-dessous nous allons d'abord illustrer comment les échanges entre les PEMFS et le chercheur apportent des éléments pour mieux comprendre les pratiques. Puis grâce à cet exemple nous illustrerons aussi l'importance de l'utilisation des ressources. Solène explique comment elle a découvert l'ouvrage ERMEL et donne des indications sur sa pratique en la comparant parfois à celle des débutants. Cet extrait montre aussi comment elle s'approprie une ressource : « *en faisant tous les exercices* ». Elle explique que sa pratique s'enrichit en utilisant et en articulant plusieurs ressources.
Elle explique aussi en quoi sa pratique se distingue de celle d'un débutant. Elle illustre également très bien un des résultats de Butlen sur l'usage des manuels. D'après cet auteur les manuels sont constitutifs des pratiques. À la lecture des propos de Solène, nous constatons qu'une étude des pratiques des PE passe par une étude des ressources utilisées.
L'expertise de cette enseignante est à la fois du côté de l'accumulation des expériences mais aussi du côté de la maîtrise de la discipline.
Solène dans un courriel (mai 2014) écrit ainsi :

> *« J'ai passé des heures à faire toutes les fiches de prep du cap math CM1 et CM2 et à faire les exercices. Je sais toujours ce que je fais et comment l'amener. Par contre, la pratique transforme la façon de travailler: je revois parfois mon approche l'année suivante.*
> *Le cafi a changé une chose : faire le lien, de penser en séquences. L'autre chose, c'est que je me suis détachée du manuel pour préparer des séquences sur une notion en allant vers ERMEL. Mais je n'y suis allée que parce que tu m'as fait découvrir ERMEL. Pour le cafi, j'ai mêlé Cap Math et ERMEL. C'est là que ça prend aussi beaucoup de temps : faire le lien entre plusieurs supports. Lorsque l'on vient me voir en classe, je n'ai pas la pression de montrer des exercices ou des activités peut-être moins ficelés car je sais de quoi je parle. Un débutant doit davantage prendre de temps pour allier connaissances et pédagogie: prendre en compte les connaissances des élèves, utiliser celles-ci et faire des liens (notamment en français pour moi). »*

Ajoutons que Solène est assurée de ce qu'elle enseigne et de comment elle l'enseigne. Suite à ce mail, nous avons eu une conversation, elle tient à dire qu'elle prépare son travail et qu'elle s'appuie dessus d'année en année. Elle précise qu'elle s'adapte à ce qui se passe en classe avec la classe qu'elle a. Tochon (1993, p89) explique qu'il « *est important de retenir que la planification des contenus didactiques est en constante adaptation* ». Ces adaptations

à chaud et ce qu'elles contiennent sont des éléments que nous allons analyser en regardant l'impact de ces dernières sur le Processus d'Institutionnalisation.
Dans cet extrait de conversation, nous pouvons voir l'importance pour ce professeur dans ses pratiques des deux ressources qu'elle utilise. C'est pourquoi nous ne pouvons pas faire l'impasse sur une étude des situations proposée par ERMEL et Cap Math sur les fractions.
Le fait que les certaines ressources soient communes à Julien, Sasha et Solène nous amène à nous poser les questions suivantes : les ressources utilisées outillent-elles les PE pour proposer des EC ? Quelle est la place de ces ressources dans le PI ?

2.5 Comment étudier un PI dans le cas d'un enseignement très contextualisé.

Nous avons expliqué que l'enseignement des fractions était une notion qui souvent induisait des EC écrites (Cf paragraphe 2.2.1 de ce chapitre). Etudier le PI pour le cas de cette notion nécessite une étude approfondie de celle-ci à la fois épistémologique mais aussi au regard des programmes. Ce sera l'objet du chapitre 3.
Le chapitre 1 nous conduit à penser qu'il est difficile d'étudier le PI sans une étude a priori du savoir à enseigner, ou bien encore que ce processus aura des spécificités en fonction de la notion étudiée. Identifier les jeux de contextualisation décontextualisation et recontextualisation ne peut se faire de manière approfondie qu'en ayant un objet d'étude précis. Ainsi l'étude des EC sur l'ensemble d'une séquence (plusieurs séances) nous permet de reconstituer ce qui est exigible sur les fractions selon les classes et d'en retracer le PI à un niveau global.
Les caractéristiques de l'enseignement des fractions induisent un recours quasi permanent de différentes représentations (parts de tartes, droite graduée, aires de différentes formes…) dans des cas de grandeurs continues mais aussi avec des contraintes fortes des programmes (mise en avant d'un contexte privilégié : celui des mesures de longueur). A priori l'enseignement des fractions est ancré dans un contexte, c'est pour nous un bon candidat pour l'étude du processus de contextualisation décontextualisation et recontextualisation -PCDR-.

3 Les protocoles d'observations et recueil de données.

3.1 Des données difficiles à recueillir : la nécessité d'établir un contrat.

Nous cherchons à décrire et à caractériser le PI des PEMFs suivis mais aussi à effectuer une étude comparative.
Notre recueil de données va nous permettre à la fois de comparer le PI de deux PEMFs sur trois ans mais aussi de comparer le PI entre quatre PEMFs en particulier. Pour les quatre PEMFs suivis, la première caractéristique est qu'il n'y avait pas d'expositions de connaissances à chaque séance. Les séquences d'enseignement proposent pour trois d'entre eux, des séances dites de découvertes dont les activités sont extraites de ERMEL ou de Cap Math.
En revanche les moments d'exposition de connaissances ne sont pas fixés selon un schéma pré établi. La situation introductive de la notion est souvent la première séance (voire la deuxième), l'évaluation est la dernière séance. Les moments d'expositions des

connaissances ne semblent pas correspondre à une séance bien définie dans un canevas précis.
Sasha ne fait plus de fiches de préparation de séquence, elle ouvre et suit ERMEL. Solène recopie, réorganise les deux ouvrages qu'elle utilise, ses fiches de préparation ne suivent pas un modèle dans lequel nous voyons explicitement le découpage des séances. Pour Julien qui a le moins d'expérience, quand il fait des préparations, il indique les traces écrites qu'il va donner aux élèves. La variété des organisations de travail de ces trois professeurs ne nous permet pas de cibler un moment précis où ils exposeront des connaissances.
C'est pourquoi nous leur avons confié une caméra ou un dictaphone pour qu'ils puissent s'enregistrer à chaque fois qu'ils feraient un cours sur les fractions. Sasha ne s'est pas toujours filmée car elle jugeait que certaines de ses séances n'étaient pas intéressantes car très répétitives. Elle filmait volontiers les moments d'introduction d'une notion, les moments pour lesquels les élèves étaient en activité. Solène se filmait volontiers et Julien a enregistré (mais pas filmé ces séances). Julien lui aussi avait des réticences à montrer des séances « *ordinaires* ».
Solène et Sasha ont eu la caméra et ont filmé les séances qu'elles jugeaient importantes. Sur les deux ans, nous avons pu recueillir un nombre de séances qui permettent de reconstituer le projet du professeur. Dès que nous le pouvions, nous assistions aux séances de classe.
Enfin, les trois enseignants déclarent qu'une fois la séquence sur les fractions terminée, ils continuaient à entrainer leurs élèves en proposant des exercices sur les cahiers ou sur les ardoises. Ce sont ces moments-là qui sont jugés souvent peu « *intéressants* » car « *répétitifs* ». Nous reviendrons sur les tâches décrites par les enseignants dans ces moments considérer comme inintéressants.
Nous avons retranscrit la plupart des séances filmées, le plus souvent dans leur totalité.
Nous proposons en annexe 2 un tableau récapitulatif de ces séances filmées.
Nous nous sommes engagée à ne jamais diffuser ces vidéos, la condition sine qua none pour avoir l'autorisation de filmer ces professeurs, rappelons-le.
Par ailleurs, nous avons récupéré sur les trois années, les fiches de préparation, les ressources utilisées, les cahiers d'exercices et les recueils de leçons et les évaluations. Chacun de ces types de données permet de reconstituer l'itinéraire cognitif[34] (Robert 2001) proposé aux élèves.
La réticence de ces PEMFs pour montrer l'ordinaire, sachant qu'ils connaissaient notre sujet d'étude, nous conduit à penser que les phases d'institutionnalisation semblent leur poser des difficultés.

3.1.1 Les séances filmées.

Dans le chapitre 1 et suite à notre expérimentation zéro, nous avons mis en évidence que les expositions de connaissances n'étaient pas nécessairement écrites. C'est pourquoi les séances enregistrées nous permettent d'avoir des données sur ce qui est dit en classe. Les séances filmées nous donnent des informations sur ce qui est écrit parfois au tableau et qui accompagne le discours oral. Ces séances nous offrent aussi la possibilité d'analyser le comportement des élèves, l'attention ou non du groupe classe. Les vidéos nous donnent aussi accès aux affichages, au plan de la classe et d'identifier ce qui est mis en place pour

[34] Nous retenons des travaux de Robert (2001), l'expression « itinéraire cognitif »pour désigner les cheminements potentiels proposés aux élèves par le professeur.

favoriser les interactions entre élèves : les élèves se tournent-ils le dos ? Ou sont-ils face à face ? Les élèves utilisent-ils leur recueil de leçons ? Les affichages ?

3.1.2 Les cahiers d'exercices.

Les cahiers d'exercices permettent de recueillir des données : d'apprécier la diversité des tâches proposées, d'étudier leur proximité avec les expositions de connaissances, la fréquence de certaines tâches et leur fréquentation dans l'année (quelques jours ou sur plusieurs mois).
L'analyse des exercices va nous permettre d'étudier la complémentarité ou non des tâches et les expositions de connaissances. Ces exercices sont-ils des exercices d'application directe du cours ? Sont-ils des compléments, interviennent-ils dans le PI et si oui comment ?
Est-ce les mêmes exercices proposés d'une année sur l'autre ?
Pour chacun de nos PEMFs, nous avons relevé tous les exercices qui traitaient des fractions, nous pourrons ainsi comparer les exercices qui ont été choisis par les enseignants et donner des éléments de réponses aux questions ci-dessus. De plus dans ces cahiers, la date est inscrite tous les jours ce qui permet d'avoir des indications sur la fréquence et sur la période d'étude de cette notion.

3.1.3 Les recueils de leçons.

Notre hypothèse de départ était que les institutionnalisations écrites représentaient une partie visible du Processus d'Institutionnalisation, ce que nous avons également appelé le livrable. Brousseau et Centeno (1991) donnent une définition du recueil de leçons. Pour eux ce cahier « *est la mémoire officielle de la classe* », mais aussi « *ce que l'élève est obligé de savoir, c'est-à-dire le résultat de l'institutionnalisation des savoirs exigibles en classe* ». Le cahier de leçons est une mise en « *ostensifs* » du savoir : une mise en perspective de textes mais aussi de tableaux, d'écritures arithmétiques, de dessins. Le recueil de leçons correspond à une sélection de connaissances parmi celles déclarées à enseigner dans les programmes et celles traitées à l'intérieur de la classe : il est donc le fruit d'un processus de transposition. Pour nous l'existence de ce recueil était un indicateur qui montrait que le professeur a l'intention d'institutionnaliser des connaissances.
Les quatre enseignants suivis proposent un recueil de leçons. Pour les quatre enseignants, cette compilation des seuls devoirs autorisés se retrouve dans un grand cahier appelé « *cahier de leçons* » ou « *cahier mémoire* ». Ces recueils compilent ce qu'il y a d'essentiel à retenir, ce qu'il y a à apprendre et qui consiste aux seuls devoirs autorisés à l'école (les devoirs écrits sont interdits depuis une circulaire datant de 1956). Sasha et Solène respectent cette interdiction (au vu des travaux inscrits[35] dans les agendas ou cahiers de textes des élèves). C'est un cahier qui part à la maison et revient, il est donc potentiellement soumis au regard des parents, mais aussi à d'éventuels collègues remplaçants qui veulent ainsi savoir ce qui a été fait en classe.
Nous avons reconstitué le sommaire quand il n'y en avait pas afin de dénombrer le nombre de leçons sur une année de 36 semaines. Ces sommaires nous permettent aussi d'avoir une idée sur l'investissement du professeur dans tel ou tel des quatre domaines des mathématiques des programmes.

[35] *Appelés devoirs.*

Une fois l'étude des sommaires réalisée nous pourrons analyser les textes destinés à être appris à la maison et qui ont vocation à expliciter les connaissances en jeu. Nous comparerons ces différents textes entre les enseignants et entre les enseignants eux-mêmes.
Ces traces écrites ont un statut particulier dans le sens où les professeurs prennent du temps pour les penser et les écrire. Nous analyserons ces textes selon leur degré de dé contextualisation (chapitre 1) et nous verrons en quoi ils sont constitutifs ou non de la mémoire didactique de la classe.
Dans l'étude des recueils de leçons, nous intégrons aussi les propositions des « *leçons* » faites par les deux ressources utilisées et nous verrons dans quelles mesures ces propositions sont prises en compte par les PE.
Notre objectif est de caractériser le Processus d'Institutionnalisation en prenant en compte les acteurs, les moyens et les activités. Le recueil de leçons peut être considéré comme un moyen d'exposer des connaissances.

3.2 Des régularités communes aux enseignants suivis

Les choix méthodologiques que nous faisons permettent de fixer plusieurs variables que nous allons rappeler. Pour étudier les pratiques nous nous appuyons sur la double approche de Robert et Rogalski (2002), nous leur empruntons la description possible des pratiques selon cinq composantes (institutionnelle, sociale, personnelle, médiative, et cognitive).
Masselot & Robert (2007) développent :

> *« La double approche, qui va se traduire par des analyses en composantes et en niveaux d'organisation à recomposer, pour approcher ce que nous cherchons. Ces analyses ont pour enjeu à la fois de nous permettre de mieux comprendre ce que l'enseignant organise en classe comme activités pour les élèves et d'apprécier ce qui est déterminé dans une pratique, ce qui est variable (les alternatives), ce qui est partagé par plusieurs enseignants et/ou ce qui est singulier. »* (Masselot & Robert 2007, p.18)

3.2.1 Une caractérisation des enseignants en termes de composantes.

Nous avions fait le choix d'étudier des pratiques caractérisées par des composantes personnelles, institutionnelles et sociales assez proches. Les trois premières composantes prennent en compte certains déterminants « *extérieurs* » à la classe.
Les deux dernières composantes (médiative et cognitive) prennent en compte les activités du professeur et des élèves. Ces deux composantes sont du côté du métier et des contenus.
Dans les passages suivants, nous allons décrire ces composantes car elles permettent de caractériser et d'établir des points communs entre les enseignants.

Composante institutionnelle :

Les quatre PEMFs suivis en particulier enseignent en cycle 3, parfois en CM1, parfois en CM2.
Leur rapport avec l'institution est bon, ils sont bien notés et reconnus par leurs supérieurs.
Ils ont lu et suivent les instructions officielles car leur mission leur impose d'accueillir des stagiaires et de leur montrer des exemples de mises en œuvre des programmes en vigueur.
Pour ces quatre enseignants, cette composante est très proche voire identique.

Sasha enseigne depuis 15 ans, Solène depuis 16 ans Julien depuis 5ans et Gwen depuis 6 ans. Sasha et Solène ont donc enseigné selon les programmes de 2002 dont elles parlent encore car ces derniers marquent encore parfois leur pratique. Julien et Gwen quant à eux ne les ont pas mis en pratique.

Composante sociale

Sasha et Solène[36] enseignent dans des écoles de 5 classes, elles sont recrutées dans leur école depuis au moins 5 ans. Leur lieu d'exercice se situe dans un milieu rurbain plutôt favorisé.
Elles sont bien intégrées et appréciées par leurs collègues et les parents d'élèves. Enfin, les parents d'élèves les sollicitent très souvent pour donner plus de devoirs écrits à la maison.
Sasha et Solène n'exercent pas dans la même école mais elles se connaissent car elles ont bénéficié de la même formation pour préparer le CAFIPEMF.
Julien exerce à mi-temps dans un milieu favorisé urbain, il est apprécié des parents mais peu connu de ses collègues. Il exerce sur deux établissements ce qui le contraint à de nombreux déplacements. Quant à Gwen il a enseigné seulement dans une seule école classée en zone difficile. Gwen n'exerce pas dans les mêmes conditions que les trois autres PEMFS.

Composante personnelle.

Les quatre PEMFs déclarent avoir un bon rapport aux mathématiques. Sasha a suivi une première S, mais a obtenu un bac A1. Sasha a une maitrise en histoire, elle a tenté sans succès l'agrégation et le capes d'histoire,. Pour Sasha tout ce que touche aux écrits est important.
Solène a obtenu un bac B, elle a suivi des études de psychologie et a obtenu un DEA en psychologie du développement (enfant et adolescent). Elle a travaillé dans des hôpitaux auprès des parents des prématurés, puis a commencé sa carrière en SEGPA. Pour Solène, la verbalisation est essentielle dans les processus d'apprentissages.
Enfin Julien a obtenu un bac S option physique puis une licence Staps. Il a été entraineur dans plusieurs équipes de handball. Pour Julien, la motivation est essentielle dans les processus d'apprentissage.
Gwen a obtenu un bac S option physique puis une licence Staps. Il a longtemps encadré et joué au Rugby. Nous n'avons que peu d'éléments sur sa conception de l'apprentissage.
Il y a des différences dans les parcours scolaires de ces quatre PEMFs, mais ce que nous retenons c'est leur rapport positif déclaré aux mathématiques et leurs expériences.

Composante médiative

Masselot &Robert (2007) expliquent que pour rendre compte de cette composante, il faut s'appuyer sur différents indicateurs comme

> *« Les choix correspondant aux déroulements, les improvisations, les discours, l'enrôlement des élèves, la dévolution des consignes, l'accompagnement des élèves dans la réalisation de la tâche, les modes de validation, les expositions de connaissances, incrémentent la composante médiative. Elle renseigne sur les trajectoires organisées pour les différents élèves, sur leurs activités possibles et, à*

[36] *A la rentrée 2015, Sasha et Solène exercent toujours dans leurs écoles.*

> *terme, sur les apprentissages potentiels correspondants. »* (Masselot & Robert 2007, p.19)

L'objet de la thèse est de caractériser cette composante et de la mettre en relation avec la description et l'analyse du PI pour chaque enseignant.
Les cahiers d'exercices et le recueil de leçons permettront ainsi de pouvoir reconstituer les déroulements en les banalisant et en préparant les comparaisons entre attendu et réalisé. Les séances filmées donneront des éléments sur les improvisations et les discours lors des moments d'expositions des connaissances. Nous ajoutons que la présence des temps d'échange à propos de la connaissance en jeu renseigne pour nous cette composante ainsi que le minutage des séances.

La composante cognitive.

Masselot &Robert (op.cit) rappellent que cette composante

> *« Correspond aux choix et aux anticipations de l'enseignant sur les contenus, les tâches, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur complexité, leur insertion dans une progression qui dépasse la séance, et les prévisions de gestion pour la séance. Elle renseigne donc sur l'environnement mathématique dans lequel sont placés les élèves et sur l'itinéraire cognitif choisi par l'enseignant. »* (Masselot & Robert 2007, p.19)

Pour renseigner cette composante, nous nous appuierons sur l'analyse des recueils de leçons, sur ce qui est utilisé dans les ressources.
Renseigner cette composante devrait nous permettre d'identifier quels sont les rôles donnés aux expositions de connaissances dans l'itinéraire cognitif proposé par les enseignants pour les élèves.
Les points communs constatés sont les suivantes pour les quatre PEMFs :

- ils sont reconnus experts et entretiennent un bon rapport avec l'institution
- la paix scolaire dans leur classe est assurée
- ils ont un bon rapport aux mathématiques
- leurs ouvrages de référence sont ERMEL et Cap Math, parfois Euro Maths
- ils exposent tous les quatre des connaissances dans leur recueil de leçons.

3.2.2 Un outil pour étudier les déroulements : les proximités-en-acte mises en jeu par les enseignants.

L'étude effectuée ci-dessus a permis de dégager deux dimensions de l'institutionnalisation. Pour étudier le PI dans les classes, il faut d'une part étudier ce qui relève d'une ou de l'autre dimension, mais aussi identifier ce qui relève du PTG et du PCDR.
Institutionnaliser un savoir ou une méthode est un processus pour lequel expositions de connaissances à l'oral et à l'écrit s'entrecroisent.
Le maître organise des séances de manière à mettre en relation connaissances anciennes et nouvelles. L'activité du professeur dans ce processus est faite d'allers-retours entre ce qui a été fait (sur lequel les élèves vont devoir s'appuyer) et ce qui est à construire. Par ailleurs une des doxas de l'école est de s'appuyer sur le discours des élèves pour construire des

traces écrites. C'est ainsi que dans les instituts de formation dans lesquels nous étions en 1996, les formateurs nous conseillaient de ne pas produire de traces écrites a priori mais de les construire avec les élèves en s'appuyant sur leur discours. Sasha et Solène ont entendu le même discours en formation dans un autre institut de formation.
Nous avons établi que les expositions de connaissances à l'écrit étaient rares, en nous appuyant sur notre travail de mémoire et notre expérimentation zéro. Nous allons dans les chapitres 4,5,6 en proposer des explications. Nous avons pensé que ces EC écrites ne semblaient pas être la clé de voute du PI mais pour autant nous postulons que les enseignants suivis exposent des savoirs. Il est alors assez probable que ces expositions des connaissances se réalisent à l'oral. Pour les qualifier nous avons vu que nous pouvons évaluer leur degré de décontextualisation, leur niveau de généralisation. En utilisant d'autres travaux nous pouvons affiner la caractérisation des EC produites en tenant compte des proximités discursives. Ces proximités apparaissent dans le discours des professeurs. Par exemple, ils peuvent alors parler des « *fois* » et des « *plus* » pour désigner la multiplication et l'addition. Il est alors hâtif d'en déduire que les enseignants ne connaissent pas les mots plus savants.
Robert et Vandebrouck (2014) ont introduit la notion de proximité-en-acte pour qualifier ce qui, dans le discours ou même dans les décisions des enseignants, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves. Robert (2015) explique que les

> *« proximités-en-acte traduisent une activité de l'enseignant (souvent discursive mais pas seulement) visant à provoquer et/ou exploiter une proximité avec les réflexions ou les connaissances des élèves ; cela est sans doute voulu par l'enseignant, mais plus ou moins explicitement, peut-être même automatiquement, cette proximité est d'ordre cognitif ou non, et concerne ou non tous les élèves »* (Robert 2015, p.5)

Ces auteurs distinguent des proximités cognitives et d'autres non mathématiques mais concourant à établir la paix scolaire comme des proximités affectives (encouragements) ou encore langagières (jouant sur divers niveaux de langue), elles peuvent se faire aussi par le biais de répétitions (avec ou sans ajouts), de reprises. Ces interventions qui ne font pas nécessairement avancer le temps didactique témoignent de l'attention et de l'intérêt de l'enseignant pour ses élèves. C'est ainsi que dans les discours des professeurs, il est possible de relever des utilisations de pronoms personnels tels « *je* » et « *nous* » comme Solène qui demande « *je voudrais que vous me disiez ce que nous avons fait la semaine dernière* ».
Dans notre projet nous nous intéressons essentiellement aux proximités plus cognitives, c'est-à-dire à tout ce que l'enseignant peut dire ou faire pour rester « *proche* » de ses élèves du côté du savoir en jeu. Ces proximités s'expriment par exemple lors des reprises ou non de mots utilisés par les élèves, des ajouts de symboles, de vocabulaire après discussions avec ces derniers. Ces proximités permettent d'établir des liens entre les activités réalisées par les élèves et la connaissance en jeu.
En nous appuyant toujours sur les travaux de Robert & Vandebrouck (2014), nous allons identifier dans le discours des enseignants trois types de proximités.
Les proximités ascendantes consistent à s'appuyer sur ce que disent les élèves en substituant ou en ajoutant du vocabulaire, du symbolisme, des niveaux de formulation plus généraux.

Par exemple : les élèves disent qu'ils ont reporté trois fois une bande. Le professeur reprend et dit qu'ils ont reporté trois unités.
Les proximités descendantes quant à elles sont celles qui permettent d'ancrer l'ancien dans le nouveau, le professeur articule un discours décontextualisé et recontextualise si besoin. Il rappelle les conditions de l'émergence de la nouvelle connaissance ou un fait saillant qui remobilise les élèves.
Par exemple : le professeur explique que trois fois trois tiers d'une unité font 1 puis recontextualise en expliquant que lorsqu'on reporte trois un tiers d'une bande unité on obtient une bande égale à l'unité.
Bien entendu ce n'est pas toujours aussi transparent que dans les exemples choisis et cela n'existe pas toujours
Les proximités horizontales, reprennent sans ajout du professeur ce qui vient d'être énoncé. Ces proximités ont sûrement un rôle non mathématique même si elles contiennent des mathématiques. Robert (2015) ajoute que « *tout se passe comme si cela servait plus à maintenir des interactions qu'à des objectifs purement cognitifs* ».
Finalement, pour caractériser les EC, nous allons utiliser les transcriptions des séances filmées. Nous allons découper en épisodes chacune de nos transcriptions quand cela est possible. Puis, nous soulignerons ce qui potentiellement dans le contexte de son émission semble relever d'une EC. Puis nous qualifierons cette EC selon son degré de décontextualisation ou son niveau de généralité et enfin nous pourrons estimer de quelles proximités relèvent l'EC produites.

4 Conclusion.

Nos données sont de différentes natures (audio et écrites). Nous les qualifions de brutes dans le cas des transcriptions, des textes dans les recueils de leçons. Nous avons aussi des données travaillées afin de pouvoir plus aisément les analyser. C'est ainsi que nous avons reconstitué les sommaires des cahiers de leçons. Nous avons aussi écrit sur la base de nos entretiens non enregistrés des notes de synthèses que nous avons fait relire aux enseignants de notre étude. Enfin pour extraire les EC de nos transcriptions, nous avons découpé en plusieurs épisodes les déroulements effectifs puis extrait ce qui correspondait à des EC et enfin reconstitué des textes de connaissances. Nous développerons cette partie de la méthodologie en nous appuyant sur un exemple dans le chapitre 4
Nos données vont nous permettre de comparer des séances sur l'introduction des séances (4 enseignants) au regard des expositions des connaissances induites. Nous pourrons alors établir s'il y a des connexions entre l'activité et les EC.
Enfin nous avons des données indirectes (qui ne sont pas liées avec les activités en classe des enseignants). Nous avons vu que ces derniers utilisent des ressources dont nous allons analyser les passages utilisés afin d'établir leur rôle potentiel dans les moments d'EC.
Notre projet permet de réaliser une étude qualitative et longitudinale (plusieurs enseignants sur plusieurs années sur le même projet) du PI.
Pour résumer, notre projet traite du Processus d'Institutionnalisation au sens élargi. Nous prenons en compte tout ce qui relève d'une exposition de connaissances en dehors de moments explicitement dédiés. Nous allons caractériser l'ensemble du processus sur une

notion en particulier : l'enseignement des fractions. Cet enseignement est souvent attaché à un contexte. De plus, l'étude de ce qu'impliquent la décontextualisation et la dépersonnalisation dans les pratiques de professeur expérimenté va être réalisée pour une notion nouvelle de fin d'école primaire. Enfin, pour mieux comprendre la genèse de ce processus, nous proposerons des analyses a priori et a posteriori des activités d'introduction que nous mettrons en relation avec les EC produites.

Enfin, suite à cet état des lieux et à ces analyses nous serons à même de décrire ce que signifie institutionnaliser dans des classes de professeurs expérimentés et d'ouvrir ainsi des perspectives notamment en formation d'enseignants.

Chapitre III - Les fractions : points d'appuis théoriques

1 Le concept de fraction et son enseignement : quels enjeux ?

Nous avons choisi de centrer notre projet sur l'étude de l'institutionnalisation dans le cadre de l'enseignement des fractions, nous avons justifié ce choix dans le chapitre II. Les questions qui nous guident sont les suivantes : du moins général au plus général : qu'enseigne-t-on en fin d'école primaire sur les fractions ? Comment et pourquoi les enseigne-t-on?
Nos recherches nous ont conduite à nous poser des questions sur l'apparition de la notion de fraction dans l'histoire des mathématiques et, à nous interroger sur l'enseignement des fractions à d'autres époques et dans d'autres pays que la France. Chaque lecture nous a conduite à enrichir notre point de vue sur ces « *nouveaux* » nombres. Ce chapitre tente d'illustrer plusieurs possibles en matière d'enseignement de cette notion et de mieux cerner les choix ainsi qui ont été faits en France.
L'institution de chaque pays, via les programmes officiels, impose des choix que les enseignants sont tenus de respecter. Notre propos n'est pas de remettre en question ces choix mais plutôt de les préciser (pour la France) et de voir comment ils orientent les pratiques voire de réfléchir à des effets possibles.
Ce chapitre a d'abord pour objectif de présenter un concept : les fractions, et d'avoir des éléments pour répondre à la question suivante « *Qu'est-ce qu'une fraction à l'école ?* ». Perrin[37](1986) pose dans une expérimentation la question suivante à plusieurs classes de CM2 et de sixième « *Si tu devais expliquer à un camarade de CE2 ce qu'est* $\frac{1}{3}$*, que lui dirais-tu ? Quels dessins ferais-tu ?* ». La réponse majoritaire des élèves ayant suivi un enseignement classique sur les fractions est de la représenter sous la forme de galettes. Perrin (1986 p23) conclut « *Pour les fractions la référence spontanée majoritaire et presque unique est celle des parts de tarte* ». D'autres exemples dans la littérature en didactique concourent à montrer cela.

Les historiens des sciences se posent la même question, en s'interrogeant aussi sur la présence des fractions dans notre quotidien. C'est ainsi que nous reprenons les interrogations de l'introduction de l'ouvrage de Benoit, Chemla & Ritter (1992) :

> « *Où sont les fractions de nos jours ? Un premier regard ne les repère nulle part, si ce n'est dans les manuels d'école primaire dont les exercices n'ont laissé que des souvenirs aussi douloureux que lointains. Le calcul décimal semble bien les avoir supplantés* ». (Benoit, Chemla & Ritter 1992 p. 9)

[37] http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_cahiers_de_didactique/#blanc *consulté le 09/09/2015*

La dernière phrase nous renvoie à notre questionnement de départ, qu'enseigne-t-on sur les fractions et dans quel objectif ? Compte tenu des choix réalisés que peut-on institutionnaliser sur les fractions ? Mais aussi, que faut-il retenir de cet enseignement ?

Ce chapitre est écrit essentiellement à partir de la consultation de documents cités en bibliographie. Nous souhaitons faire une synthèse d'ouvrages et de publications traitant des fractions et des obstacles rencontrés dans la genèse de ce concept mais aussi dans son enseignement.
L'étude s'articule en quatre axes :
- un axe historique relatant la reconnaissance des fractions comme nombres et les difficultés liées à leur représentation symbolique.
- un axe qui étudie le concept actuel des fractions selon les recherches nord-américaines issues du Rational Number Project (RNP)[38]
- un axe curriculaire qui reprend les injonctions officielles sur l'enseignement des fractions de 1880 à nos jours.
- un axe didactique qui permet de retracer certains résultats issus de la didactique des mathématiques sur l'enseignement des fractions en France.

1.1 Aperçu historique.

Avant de développer cette partie, nous justifions son intérêt en rapportant ce que souligne Artigue (1989) sur l'importance d'un détour épistémologique pour le didacticien. En tout premier lieu, Artigue explique que

> *« Le didacticien est concerné par la construction des connaissances mathématiques dans un milieu constitué à cette fin par des individus, des élèves, des adultes actuels. En ce sens, il est confronté au problème de l'élaboration (pour des recherches de type ingénierie didactique) ou de l'analyse de genèses de la connaissance que, pour les distinguer de la genèse historique, on qualifie souvent de genèses artificielles. Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins pour le didacticien un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou base de travail s'il s'agit d'élaborer une telle genèse.*
> *Ceci pour une raison évidente à savoir que les problèmes qui ont motivé l'introduction de tel ou tel concept comme ceux qui ont gouverné son évolution sont constitutifs de la signification de ce concept et que le didacticien dans son analyse est nécessairement confronté à ce problème de la signification de ce concept. »* [39] (Artigue 1989, p.3)

[38] *Tous les articles sont consultables en ligne : http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/*

[39] *Souligné pour nous*

Cette recherche sur l'origine du concept, sur les obstacles qui ont motivé son introduction et sur le développement de la notion nous semble incontournable pour l'étude des nombres rationnels et en particulier des fractions. Les fractions admettent en particulier des usages, des interprétations et des représentations variés sur lesquels nous reviendrons lorsque nous aborderons l'axe conceptuel.

1.2 Antiquité : les premières fractions.

Plusieurs historiens des mathématiques ont décidé en 1992 d'organiser un colloque pour traiter de l'histoire des fractions. Les actes de ce colloque sont regroupés dans un livre : « *Histoire des fractions, fractions d'histoires* ». Ces auteurs expliquent dans l'introduction de leur livre qu'il n'existe pas d'histoire des fractions ni de livres traitant de cela, ce qui a motivé la production de leur ouvrage. Pour ce faire, plusieurs historiens des sciences se sont réparti les périodes et les lieux pour lesquels il existe des textes historiques traitant des fractions. Le thème est tellement riche que leur étude, dans le cadre de ce colloque, s'arrête au XVI^{ème} siècle. Notre propos n'est pas de faire un long détour sur l'histoire des fractions mais plutôt de mettre en relief, à partir de cette source ce qui a fait obstacle à définir la fraction comme un nombre durant ces millénaires.
Chronologiquement, l'histoire des nombres est d'abord celle des entiers. Puis, les fractions apparaissent rapidement pour « *répondre* » entre autres, à des problèmes de partage. Quant aux décimaux ils verront officiellement le jour au XVI^{ème} siècle. L'histoire des fractions est aussi liée à celle de la proportionnalité, de la division, et des décimaux car ces notions mathématiquement sont liées et font partie du même champ conceptuel.
Au début de cette histoire, les usages des fractions apparaissent pour répondre à des questions très pragmatiques (partage d'un héritage, part à prélever pour un impôt, donations et transactions commerciales), parfois ésotériques pour déterminer la part de Dieu, d'esprit et d'argile de certains humains (chez les Babyloniens). Chaque partie de l'œil d'Horus (dieu protecteur des pharaons) représente une des fractions usuelles égyptiennes ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$...).
Si les fractions se sont ainsi « *imposées* » pour aborder des problèmes pratiques, elles font cependant l'objet de réflexions et, de définitions dans divers documents comme celui des Chinois intitulé « *les neuf chapitres* ». L'ouvrage écrit par les scientifiques chinois peut être assimilé à un traité d'arithmétique. Ainsi, montrent-ils que l'intérêt porté aux nombres fractionnaires peut concerner l'objet mathématique.
L'histoire des fractions couvre de fait un champ très vaste, traversant beaucoup d'époques, des cultures, et des aspects variés. Les historiens des mathématiques en retrouvent des traces dans l'Egypte des pharaons au XX^{ème} siècle, de la Chine à l'Europe occidentale.
On trouve la trace des fractions dans les civilisations anciennes : en Egypte vers -2500, en Mésopotamie vers -1800 avec les Babyloniens, en Chine vers -1300.
La fraction est née des obstacles que les mathématiques anciennes rencontraient pour proposer des solutions aux divisions à effectuer. D'après Bruins (1992) la division quant à elle prend son origine dans la distribution des articles. Deux cas apparaissent : les distinctions de ces deux cas sont en relation avec la présence ou non de reste. Dans un cas le reste est nul, dans l'autre cas il existe un reste plus petit que le diviseur. C'est ce reste non entier qui nécessite une attention et une réflexion particulières. Ce reste « *réfractaire* », cette impossibilité à exprimer le partage de ce reste a conduit à l'émergence des fractions.

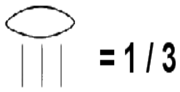
Cependant des traitements différents selon les contextes ont posé les bases des premières règles de calcul en partie liée au système de numération.

Le cas des fractions dites unitaires ou simples

Les historiens des sciences prennent des précautions quand ils évoquent le rôle et le sens de l'unité dans les fractions égyptiennes (parmi les premières à paraître). Ces fractions sont dites unitaires car le numérateur privilégié est 1, sans pour autant que ce 1 face lieu de référence explicite à une unité comme unité de mesure. Caveing (1992) explique que rien ne prouve que les Égyptiens aient pensé que le nombre 1 pût être fractionné. Caveing ajoute

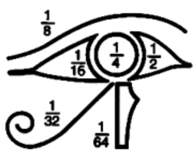
> *« D'ailleurs le terme unité est ambigu : la numération égyptienne étant additive, de base dix, la dizaine, la centaine sont aussi des « unités » qui apparaissent comme telles dans le graphisme ; les unités métrologiques sont évidemment divisibles : le heqat se divise en 10 hins, le deben en 10 qites ; 10 setats valent 1 auroure ; 6 palmes une coudée ; enfin l'unité peut être l'attribut d'un objet, totalité partageable ou non, comme un héritage foncier ou un homme dans une armée. »* (Caveing 1992, p.40)

Caveing conclut en s'appuyant sur l'analyse des calculs égyptiens, que ces derniers pouvaient calculer sans diviser l'unité. Ce sont les Grecs qui ont envisagé l'unité comme unité de mesure.
L'histoire des fractions est aussi marquée par l'usage de signes et de désignations orales de ces fractions unitaires (parfois appelés propres). Que ce soit dans les pays du monde arabe, en Inde, en Mésopotamie ou bien en Egypte, les fractions($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$) ont souvent un symbole propre. Ainsi pour illustrer cela, nous nous appuyons sur un exemple datant du IIIème millénaire avant J.C., en Egypte, les scribes écrivent les nombres sur des papyrus sous forme de hiéroglyphes. Les Egyptiens utilisent un système de numération reposant sur le principe additif. Ils représentent les fractions de type $\frac{1}{\mathrm{n}}$ (fractions unitaires) en plaçant le symbole de bouche au-dessus du dénominateur.



Seules certaines fractions disposent de symboles spécifiques, réunis ils représentent l'œil d'Horus.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$



Toutes les fractions sont ainsi exprimées comme somme de fractions unitaires. Ce qui peut imposer des décompositions pas nécessairement les plus simples possible car elles doivent se faire avec des fractions toutes différentes entre elles. On privilégiera par exemple
$\frac{3}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}$ à $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

Dans ce système d'écriture, la duplication (multiplication par 2) joue un rôle essentiel comme intermédiaire de calcul. Les Egyptiens disposent d'ailleurs de tables de décomposition du double d'une fraction donnée.
Avec les notations actuelles $\frac{2}{7}$ se décomposerait ainsi : $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + (\frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7})$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$

La réduction de la dernière parenthèse s'obtient à l'aide d'une table de décomposition. Le célèbre papyrus Rhind s'ouvre sur une table de ce type. On y trouve des décompositions de fractions de type 2/n (n impair) en fractions unitaires. Les fractions de l'unité semblent être plus usuelles mais leur utilisation sera à l'origine d'obstacles pour effectuer des calculs. Il peut nous paraitre évident que les calculs deviennent rapidement trop complexes.
Le monde arabe à l'époque du Moyen-Age (souvent héritier des travaux indiens) distingue trois types de fractions en fonction de la « *taille* » du dénominateur.
- les fractions simples 1/n avec 2≤n≤10
- les fractions sourdes 1/n avec n≥10
- les fractions composées des 2 premiers.

Les fractions sont nommées différemment pour autant elles ne sont pas considérées comme des nombres mais plutôt comme l'expression de quotients. D'après Mazars (1992) dans de nombreux traités de mathématiques des différentes civilisations antiques et du Moyen-Age nous pouvons retrouver des désignations des différents types des fractions sans pour autant parvenir à une description du concept de fraction (Mazars op.cit)
En Occident, toujours sur la période de l'antiquité, les premières traces d'une réflexion sur les fractions se rencontrent lors de la résolution de problèmes de division. Les traces retrouvées appartiennent à des documents chinois. L'utilisation des fractions en Inde et en Chine se rapproche de celles des Grecs et des Babyloniens d'après Chemla (1992). L'ouvrage qu'elle étudie : « les neuf chapitres » est un document chinois qui compile les connaissances mathématiques, il peut être considéré comme un traité d'arithmétique qui propose de nombreuses règles que nous pouvons identifier comme des expositions de connaissances décontextualisées. On peut y lire « *quand le dividende a un reste, à l'aide du diviseur le nommer : le diviseur est pris comme dénominateur, le reste du dividende comme numérateur* ». Nous pouvons retrouver dans ce traité de nombreuses règles définissant tous les possibles sur les opérations et les fractions.
Les savants chinois montrent alors le besoin qu'ils ressentaient d'écrire voire de formaliser des règles pour transmettre un savoir, d'écrire des textes comme support à la mémoire collective.

1.3 Les fractions dans d'autres civilisations de l'Antiquité et du Moyen-Age

En Mésopotamie se repend l'utilisation de fractions sexagésimales. Ces fractions sont adoptées par les Grecs jusqu'au Moyen-Age et seront précurseurs des fractions décimales. Par ailleurs l'usage des fractions sexagésimales est maintenu en astronomie jusqu'au XVIème siècle. Glassner (1992) explique que la conjugaison de l'écriture cunéiforme, du système sexagésimal et du bilinguisme (Sumérien et Akadien) permettent aisément la conceptuali--sation du champ mathématique et sa représentation :

> *« Le nombre 60 présente une base très satisfaisante à cause de sa grande aptitude à la divisibilité ; le jeu des graphies multiples qu'autorise l'écriture cunéiforme se déploie dans ce domaine comme il le fait, plus généralement, dans la mise par écrit de la pensée. »* (Glassner 1992, p.115)

Michel (1992) rejoint Glassner sur la richesse des écritures et le choix judicieux de la base 60. Elle explique que le système sexagésimal est en vigueur très vraisemblablement à cause de la richesse de ce nombre en diviseurs. Ainsi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 sont les diviseurs de 60. Dès lors pour chaque fraction correspond un entier, à $\frac{1}{2}$ correspond 30, $\frac{1}{3}$ correspond 20, $\frac{2}{3}$ à 40, $\frac{1}{4}$ à 15, $\frac{3}{4}$ à 45, $\frac{1}{6}$ à 10 et $\frac{5}{6}$ à 50.
Glassner (1992) met en évidence au moins deux signes pour décrire une fraction telle que $\frac{1}{3}$ mais aussi deux expressions différentes. Ces mathématiciens ont aussi recours à des symboles qui se distinguent pour les fractions unitaires $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}$. Nous pourrons noter l'absence du quantième $\frac{1}{5}$. Ainsi les fractions $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4}$ et $\frac{n}{6}$ avec n entier naturel ont comme plus petit dénominateur commun 12. S'ils avaient retenu les fractions en cinquièmes le plus petit dénominateur commun serait 60. Michel (p91) ajoute que si les Mésopotamiens avaient conservé le cinquième, ils auraient été amenés à utiliser toutes les fractions du type $\frac{n}{5}$ (n inférieur ou égal à 5). Cette difficulté aurait alors induit la création de nouveaux signes ce qui aurait considérablement alourdi le système d'écriture.
Briand et Peltier citent un extrait de Dedron et Itard (1972) qui montre la longévité de l'utilisation du système sexagésimal :

> *« Cependant ni les Hindous, ni les Arabes, ni les Occidentaux jusqu'à la fin du XVI^{ème} siècle ne se sont aperçus de l'intérêt qu'il y aurait à développer le système décimal de position dans les deux sens, comme les Babyloniens avaient développé leur système sexagésimal. Ce retard provient essentiellement de la perfection même de la numération en base soixante. Adoptée à partir du siècle avant notre ère par les astronomes grecs, conservée par les astronomes arabes (toutes les tables avaient été calculées dans cette base) elle fut utilisée dans les calculs astronomiques jusqu'au XVII^{ème} siècle et est encore utilisée pour les angles et les temps… »* (Briand & Peltier 2003, p.382)

Une partie du questionnement dans toutes ces civilisations présente des points communs : notamment retrouver l'aisance des calculs sur les entiers avec les fractions, ce qui implique souvent d'utiliser des décompositions en entiers et fractions simples ou d'utiliser d'autres bases que la base 10. Ces civilisations avaient bien perçu que les difficultés de représentations et de calculs n'étaient pas les mêmes selon que les dénominateurs étaient les mêmes, ou avaient ou non un diviseur commun.

1.4 Les fractions en Europe au Moyen-Age

Le Moyen-Age latin a peu aimé les fractions. Les chiffres romains se prêtent très mal à l'expression des fractions. Pour résoudre le problème des partages des quantités qui ne soient pas des nombres entiers, les hommes du haut Moyen-Age s'appuyèrent sur les travaux des Romains. Ils divisèrent les unités de poids ou de longueur en sous multiples comme le montre certaines sources retrouvées (table de Victor d'Aquitaine). Benoit et al. notent :

> « *tout au long de cette période, des systèmes d'unités, souvent complexes ont été mis au point pour éviter d'avoir à recourir à d'autres nombres que des entiers* ». Les auteurs ajoutent « *C'est cependant au Moyen Âge que les pays d'Occident finissent par adopter de nouvelles formes pour exprimer les fractions. Ces nouvelles formes permettent de développer des calculs ouvrant ainsi une voie nouvelle à la pratique mais aussi à la conception des nombres.* ». (Benoit et al 1992 p.182)

À la fin du Moyen Âge, peu à peu, à cause de la lourdeur des calculs et de la multiplicité des unités de mesures des grandeurs, les marchands adoptèrent l'écriture chiffrée telle que nous la connaissons. Ils adoptèrent aussi l'idée des fractions mais tout d'abord comme étant des nombres rompus c'est-à-dire des nombres qui ne peuvent être supérieurs à un. Bien entendu cette position pèse sur les calculs et ils devront abandonner ce dernier principe. Le numérateur et le dénominateur portent des noms qui ne sont pas fixés (Benoit 1992), mais ils se placent comme actuellement et sont séparés par une barre horizontale de fraction. L'usage des fractions reste cependant limité. Elles ne sont souvent utilisées que dans la sphère des transactions commerciales. Le monde du Moyen-Age latin en voulant « *éviter* » l'usage des fractions, et parce que son système de numération et les signes associés étaient de véritables obstacles, a construit un système de mesures très « *dense* » (en termes d'unités de mesures).
Ce que nous retenons de cette synthèse essentiellement réalisée d'après les travaux de différents historiens des mathématiques est que l'usage des fractions se retrouve dans des « *contextes* » variés (mesure, proportion, partage). Ces variétés de contextes mobilisent une variété dans les procédures liées notamment au calcul mais aussi dans les choix des signes. Dès le début de leur histoire les fractions dites simples ont une place à part et sont identifiées par leur dénomination (numérateur égal à 1 et dénominateur compris entre 2 et 10) et par des symboles particuliers.
Dans le paragraphe suivant nous allons montrer que le codage des fractions : numérateur, barre et dénominateur sont également le fruit d'une longue histoire.

1.5 La naissance de l'écriture actuelle des fractions

Nous avons montré un exemple possible de représentation par des hiéroglyphes des fractions. D'autres représentations de ces fractions ont coexisté. Avant les Arabes, les savants indiens utilisent une notation proche de la nôtre mais sans la barre de fraction. Bhaskara (1114 ; 1185) note couramment les fractions en surmontant le dénominateur du numérateur. Les essais pour distinguer rapidement numérateur et dénominateur ont jalonné l’histoire des fractions. Pour illustrer notre propos, nous allons utiliser un exemple proposé par Djebbar (1992). Djebbar nous apprend que jusqu’à la fin du XII^{ème} siècle, il semble qu’on ait toujours représenté les fractions simples et composées en alignant verticalement numérateurs et dénominateurs sans trait de fraction. Il ajoute que l’absence de ce trait de fraction conjuguée avec la longueur des fractions exprimées en quantième pouvait introduire des erreurs dans la lecture des expressions écrites et dans les opérations qui leur étaient appliquées. Ainsi l’écriture des nombres 25, 12, 73 en colonne pouvait être lue de différentes façons :

25 pouvait signifier $25+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$ ou $(5+\frac{2}{3})+(2+\frac{1}{7})$ ou $(5+\frac{2}{3})\text{x }(2+\frac{1}{7})$
12
73

Pourtant, cela n’a pas amené les calculateurs de l’Orient (des IX^{ème} et X^{ème} siècles) à introduire des modifications symboliques des fractions

La **notation fractionnaire avec la barre** est un héritage du Moyen-Orient. C’est le Perse Abu’l-Wafa (940 ; 998) qui est un des premiers à accorder le statut de nombre à tout rapport de grandeurs. Plus tard et toujours au Moyen-Orient, en 1427, Jemshid Al Kashi (1380 ; 1430), astronome de Samarkand, donne une définition des **fractions décimales**. Il expose sa théorie et montre comment décomposer toute fraction en somme de fractions décimales. *Al Kashi* détaille les techniques opératoires en expliquant qu’en utilisant les fractions décimales, les opérations sur les fractions se ramènent à des opérations sur les entiers. Il conçoit également des tableaux de conversion de fractions décimales en fractions sexagésimales antérieurement utilisées par les Babyloniens.

En Occident, dès le XIIème siècle, le traducteur anglais Adelard de Bath (1075 ; 1160) utilise dans sa traduction du Perse Al Khwarizmi (780 ; 850) le mot fractiones (« *kasr* » en arabe pour signifier rompu ou fracturé).

C’est au XII^{ème} dans le liber Abaci de Fibonnaci que les premières traces de la notation avec la barre de fraction apparaissent (empruntées aux scientifiques arabes). Son usage ne sera reconnu qu’au XVI^{ème} siècle.

Les publications de François Viete (1579) et surtout celles de Simon Stévin exposent le système décimal dans L’arithmétique (1585) sous le titre « La Disme » : « *Elle enseigne d’expédier facilement et sans nombres rompus, tous les comptes qui se rencontrent en affaires des humains…* »

En 1634, Viète approfondit la notion théorique de nombre réel. Il insiste sur le fait que la représentation décimale illimitée permet d’assimiler les irrationnels à de véritables nombres, puisqu’ils en ont les mêmes propriétés opératoires. C’est bien à la fois par l’utilisation des fractions décimales pour écrire les nombres et par les calculs sur ces fractions que l’œuvre de Simon Stevin se distingue.

Brousseau révèle ce détour épistémologique et conclut ainsi :

> *« C'est après Simon Stevin (1585) que le décimal accède au statut de notion mathématique.*
> *Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques et les multinomiés- les fonctions Polynômes- pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. Les décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, la*

> *constitution de tables. Leur rôle conceptuel reste le plus caché ». Pour Stevin, « les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes sont des nombres (réels) parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux; il n'a pas écrit cette phrase, mais tout se passe comme s'il l'avait pensée »* (Brousseau 1987, p.452)

Les nombres décimaux apparaissent alors comme la solution aux problèmes de calculs, et d'équivalences posés par les fractions. L'apparition des décimaux semble avoir réglé de nombreuses difficultés tant du point de vue des signes que des opérations. Les fractions sont reconnues comme des nombres car elles permettent de s'approcher d'aussi près que possible des entiers.

1.6 Définition mathématique actuelle.

Nous retenons de cet aperçu sur les fractions dans l'histoire que le point commun de toutes ces civilisations n'est donc pas les écritures ni les calculs associés mais les possibilités qu'elles offrent pour résoudre des problèmes. L'humanité a d'abord envisagé les fractions sous leurs interprétations « *outils* », c'est essentiellement au XVI^{ème} siècle que les fractions vont être étudiées sur le plan théorique pour elles-mêmes. Pour conclure nous nous appuyons sur la conclusion de Caveing (1992) qui rappelle que la notion de « *proportion* » est sous-jacente chez les Egyptiens et explicite chez les Grecs, est historiquement antérieure à la notion de « *fraction* » et plus fondamentale qu'elle,

> *« tributaire de la mesure des grandeurs, l'enseignement classique des fractions a toujours été peu ou prou sous la dépendance de références au concret et jamais pleinement satisfaisant et cohérent au plan théorique, jusqu'au moment où ces références ont disparu, grâce à la définition du nombre rationnel comme couple d'entiers et classe d'équivalence »* (Caveing 1992, p.50)

Enfin, envisager la fraction comme nombre et objet mathématique est le fruit d'un très long travail de plusieurs générations de mathématiciens nourri de tâtonnements. Etudier à l'école les fractions est un projet qui peut alors paraitre ambitieux.
Perrin (2005), dans un ouvrage à destination des professeurs des écoles, propose des éclaircissements mathématiques dans plusieurs domaines. Pour les rationnels, il introduit ces notions en leur donnant d'emblée le nom de nombre. Il souligne également que dans l'histoire, les fractions n'ont eu que tardivement ce statut. Il effectue deux remarques qui nous semblent essentielles :
- un rationnel va apparaitre, quelle que soit sa notation comme un couple : c'est une caractéristique des rationnels de comporter deux symboles.
- l'écriture d'un rationnel sous forme d'une fraction n'est pas unique : il revient au même de partager une unité en 2 parties égales $\frac{1}{2}$ ou d'en partager deux en quatre parties $\frac{2}{4}$. La conclusion est que des couples différents (1,2) et (2,4) pourront donner le même rationnel : il y a nécessairement une relation d'équivalence à prendre en compte et c'est une des difficultés à la compréhension de ce que sont ces nombres. Cette difficulté était connue et a traversé l'histoire des fractions.
L'ensemble des nombres rationnels est appelé Q. Ces nombres peuvent être notés sous la

forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a $\in$ Z et b $\in$ N /(0). L'entier a est appelé le numérateur de la fraction et l'entier b le dénominateur.

Relation d'équivalence

Ce qui justifie le fait d'avoir le droit de simplifier des fractions et d'établir des égalités entre elle, est lié au fait qu'une relation d'équivalence est établie entre les couples d'entiers ce qui assure l'égalité de certaines fractions constituées des couples équivalents. Rappel : Cette relation d'équivalence définie assure l'égalité de certaines fractions. Elle est définie ainsi :

La relation R de Z x Z^* définie par (x ; y) R (x' ; y') ⇔ xy' = yx' est une relation d'équivalence.

On appelle nombre rationnel toute classe d'équivalence de la relation d'équivalence définie ci-dessus sur ZxZ^*. Ainsi tout couple (a ; b) pourra être considéré comme le représentant

d'une classe d'équivalence (donc comme un rationnel). Lorsqu'on écrira (a,b) = (a',b'), il faudra en fait comprendre (a,b) R (a', b') ou encore ab'=ba' où on reconnaît le «*produit en croix*. »

Notons que l'égalité entre deux rationnels, si l'on adopte l'écriture fractionnaire, peut masquer le fait qu'il s'agit d'une égalité entre deux rationnels, si l'on adopte l'écriture fractionnaire, elle peut masquer le fait qu'il s'agit d'une égalité entre deux classes d'équivalences, c'est-à-dire que les deux représentants sont en relation l'un avec l'autre. Il y a équivalence entre des couples de nombres et égalité des fractions. Par abus de langage, on parlera également d'équivalence de fractions lorsqu'on écrira $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$

L'ensemble des nombres rationnels est un corps

Pour prouver que Q est un corps, il faut définir l'addition et la multiplication dans Q et prouver que l'addition est associative, commutative, qu'elle admet un élément neutre 0 et que tout élément admet un symétrique (opposé) contrairement à ce qui se passe pour les entiers naturels. Le plus difficile n'étant pas de démontrer les propriétés, la réelle difficulté se situe dans « *définir l'addition et la multiplication dans Q* ». La multiplication est associative, commutative et distributive par rapport à l'addition, elle admet un élément neutre, 1, tout élément non nul admet un inverse. Les preuves de ces différentes propriétés reposent en partie sur le fait que le couple (a ;b) peut être défini par le quotient et que la somme et le produit de quotient sont définis dans Z.

Une relation d'ordre (≤)

Nous avons dans cette partie rappelée les définitions et les propriétés qui permettent de définir l'ensemble des nombres rationnels, de plus Q est un corps totalement ordonné, l'ordre défini est archimédien et dense.

Perrin (2005) en s'appuyant sur ce que dit Brousseau (1981) explique que « *selon l'analyse de Brousseau (1981), le développement historique du concept de rationnel montre que la structure conceptuelle qui soutient sa cohérence ne s'est organisée qu'au XVI^ème^ siècle.* ». Il ajoute que c'est seulement à ce moment-là *que le quotient « sera à la base de la définition des classes d'équivalence avec des propriétés de groupe qui définissent l'ensemble des rationnels. La barre de fraction peut être vue comme un symbole représentant cette relation d'équivalence ».*

Nous ajoutons que c'est à partir du XVI^{ème} siècle que les jeux d'écritures en fractions décimales et écritures décimales lèvent définitivement le voile sur les liens entre écriture fractionnaire et décimale.

2 Enseigner les fractions

L'enseignement des fractions débute en France au cycle 3, le plus souvent auprès d'élèves âgés de 9 ans. Ces nouveaux nombres, font ensuite partie de l'enseignement des mathématiques et ce jusqu'au lycée. Les choix qui sont faits pour poser les bases de cet enseignement en France, selon les programmes successifs et ailleurs sont différents.
Cassinet (1992), explique que l'histoire des fractions est surtout

> *« celle d'une diffusion, et ce en plusieurs sens. Les fractions occupent une place déterminante dans l'apprentissage des mathématiques, il faudrait à la fois étudier l'évolution de leur enseignement, à la fois dans les méthodes et les applications et de leur importance dans les programmes »* (Cassinet 1992, p.340)

En nous appuyant sur ce que conseille Cassinet, nous allons proposer de présenter l'évolution des programmes en France sur les fractions. Nous allons également présenter les points d'ancrage théorique qui fondent une partie des programmes anglo-saxons.
Cassinet remarque qu'en France et de nos jours, les fractions apparaissent peu dans notre vie quotidienne pourtant elles sont enseignées. Paradoxalement les Instructions Officielles, pour le primaire, n'ont de cesse de répéter que les notions mathématiques doivent être abordées en s'appuyant sur des situations concrètes s'appuyant sur des situations de la vie courante. L'amalgame entre concret et vie quotidienne est souvent réalisé. Nous nous demandons alors s'il y a, à l'école et au collège, encore un intérêt à enseigner les fractions si celles-ci ont cessé de jouer un rôle dans notre société ? Enseigne-t-on les fractions car elles ont un intérêt dans la société ou parce qu'elles en ont un dans la construction de la pensée mathématique ?
Les didacticiens français se sont posé des questions relatives au rôle et à la place des fractions dans les programmes et à la programmation adoptée. Les débats autour de cet enseignement ont été et restent vifs : faut-il introduire les fractions puis les décimaux, en s'inspirant de l'histoire des nombres rationnels ? Ou bien au contraire faut-il d'abord traiter des décimaux puis des fractions ?
Bolon (1993) explique que ces questions ont été de nombreuses fois traitées par les équipes des INRP (1975-1980) sans pour autant avoir été tranchées.
D'autres questions plus ou moins dépendantes de celles de la programmation étaient en relation avec les obstacles découverts au sujet de l'enseignement des décimaux.
Pour proposer des éléments de réponses à toutes ces questions, nos investigations se développent selon trois directions : (1) d'une part étudier ce que signifie enseigner un concept (les fractions) relevant de la construction de ce qu'est un nombre rationnel, (2) d'autre part étudier les choix qui ont été faits dans les programmes officiels français (3) et enfin établir ce que nous retenons pour notre étude de la littérature en didactique des mathématiques au sujet des fractions.

2.1 <u>L'enseignement des fractions du côté conceptuel.</u>

Depuis 1979 une équipe de chercheurs américains axe ses recherches sur la construction des nombres rationnels. Ces recherches s'ancrent dans un projet appelé « *the Rational number* *project* ». Ces chercheurs nord-américains Behr, Lesh & Poster, (Behr et al 1992, 1993) utilisent et fondent certains de leurs résultats sur les travaux de Piaget et de Vergnaud. Vergnaud collaborera avec cette équipe en 1983 pour l'écriture d'un chapitre dans Acquisition of mathematics concepts and processes, Les fractions sont étudiées par Vergnaud sous l'angle de leur conceptualisation et de l'intérêt de les conceptualiser comme élément essentiel pour la construction de la pensée algébrique. Behr et al avancent (1993) cet argument et un autre lié à la richesse des représentations graphique et langagière des fractions. Enseigner les fractions est important du point de vue mathématique (comme base à la compréhension de ce qu'est un nombre rationnel) mais aussi parce que c'est une des notions mathématiques où les systèmes de représentation interagissent avec le concept.

2.2 Quelques résultats issus du projet « the rational number project »

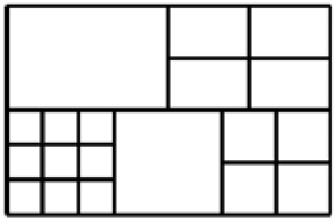
Nous exposerons dans cette partie ce qui va nous servir ensuite dans nos analyses. Plusieurs points retiennent notre attention. Tout d'abord, d'après ces auteurs, construire le concept de nombre rationnel dépend de la fréquentation et de la rencontre de ce que Behr et al (1992) appellent les différentes « *personnalités des fractions* ». Ils montrent qu'enseigner les nombres rationnels en s'appuyant sur des définitions mathématiques est plus facile que d'introduire les fractions à une classe d'âge qui n'a pas accès encore à ce niveau de formulation. Ces auteurs expliquent qu'ils sont en mesure de donner aisément des définitions claires et précises des nombres rationnels en mathématiques. Pour appuyer leur propos, ils proposent la définition suivante : les nombres rationnels sont des éléments d'un champ de quotient infini composé de classes d'équivalences infinies, et les éléments des classes d'équivalence sont des fractions. Ils ajoutent que ce qui est difficile c'est la reconnaissance et l'apprentissage des différentes « *personnalités* » des fractions. « *However, when fractions and rational numbers as applied to real-world problems are looked at from a pedagogical point of view, they take on numerous "personalities."* ». Le problème principal déclaré étant de décrire ces différentes interprétations ou aspects des fractions. Nous préférons parler des différents « *aspects* » des fractions plutôt que des « *personnalités* ».
Les débats sont vifs pour déterminer le nombre de ces différents aspects, cela oscille, selon les auteurs, entre 4 à 6. Behr et al (1983) en distinguent 6, puis 5 qu'ils distinguent ainsi : les fractions « *opérateurs* », les fractions « *partie d'un tout* », les fractions « *ratio* », les fractions « *quotient* » et les fractions « *mesure* » et « *décimal* ». Kieren (1976) et Vergnaud (1983) reconnaissent 4 interprétations dans un premier temps : « *opérateurs* », « *mesure* », « *ratio* », « *quotient* ». Les discussions s'engagent autour de l'interprétation « partie d'un tout » notamment à cause du statut de l'unité et de la pluralité de l'unité. Kieren (1993) intègre finalement cette cinquième interprétation « *partie d'un tout* » qui pour lui est une sous construction de la fraction-mesure et de la fraction-quotient. Pour Kieren et Vergnaud ce n'est pas vraiment un aspect. Déterminer la partie d'un tout relève d'une opération mentale qui semble être un préalable à la compréhension des autres aspects.
C'est ainsi qu'apparaissent pour certains chercheurs nord-américains deux opérations mentales distinctes : le « *partionning* » : savoir partager en parts égales, déterminer une part d'un tout et l' « *équivalence*. » : en utilisant diverses représentations graphiques, savoir écrire plusieurs fractions équivalentes. Trois difficultés d'enseignement apparaissent : l'unitizing (déterminer l'unité), le partionning (établir des parts équivalentes) et ce qui est attaché aux écritures de fractions équivalentes.
Perrin (1986) relève des exemples de cette difficulté du « *partionning* » dont nous montrons

ci-dessous un exemple.

Lamon (2008) propose plusieurs activités qui illustrent le partionning et l'unitizing, nous en exposons une. Cette activité est proposée à des élèves de 8-9ans.

(Lamon 2008, p.87)

> Use the following picture on an overhead with third or fourth grade students and ask them what fractional parts they can see and how they see them. Then, color in various pieces and have the students determine the fraction names.



Pour réussir cet exercice et proposer des écritures correctes il faut réussir à déterminer quelle est l'unité de référence en jeu et la désigner.
Adjiage (1999) analyse plus précisément le partionning et l'aspect parti d'un tout dans sa thèse. Il s'appuie également sur les mêmes auteurs nord-américains. Nous renvoyons le lecteur à ses analyses.
Pitkethly et Hunting (1996) estiment qu'il est nécessaire d'avoir compris et de savoir différencier ces 5 aspects des fractions avant de construire le concept de nombre rationnel. Il existe d'autres « *classifications* » de ces aspects moins connues. En revanche, tous s'accordent à reconnaitre deux aspects communs, celui qui correspond à la « *partie d'un tout* » -même s'il est intégré dans d'autres interprétations- et l'aspect quotient.
Dans les manuels utilisés en classe, l'enseignement de la détermination de la partie d'un tout est assez universel. Alajmi (2012) réalise une étude comparative sur l'introduction des fractions dans 3 pays : les Etats Unis, le Koweit et le Japon. Une de ses conclusions est que l'étude de la partie d'un tout est la plus commune des interprétations retrouvées dans les différents manuels analysés. Ce résultat réapparait dans d'autres études notamment au Canada (voir programme Ontario) et l'ouvrage de Van de Walle (2010)
Enfin, malgré des difficultés dont l'origine est souvent difficile à cerner, selon les chercheurs du « *rational number project* » l'enseignement des fractions est important, car, d'un point de vue cognitif, la complexité de la notion exigerait le développement de plusieurs structures de pensée chez les élèves. Certains affirment comme Seigler et al (2012), dans une revue de psychologie que « *Did you know that children's performance in fractions predicts their mathematics achievement in secondary school, above and beyond the contributions of whole number arithmetic knowledge, verbal and non verbal IQ, working memory, and family education and income?* »

En résumé, ils avancent que la compréhension des fractions dans toutes leurs interprétations serait prédictive de la réussite en algèbre et arithmétique des élèves dans le secondaire.
L'approche des Anglo-saxons s'appuie sur les travaux des psychologues. Ce programme de

recherche marque les programmes officiels anglais et plus largement les programmes des Nord- américains. Nous retrouvons de nombreuses références de leurs travaux dans les programmes canadiens de l'Ontario[40]. De plus de nombreuses tâches décrites dans les modules d'apprentissages du RNP sont reprises [41]dans ces programmes et ceux du Royaume Uni.
Pour notre étude, cette littérature anglo-saxonne nous permet essentiellement d'adopter une classification des différentes interprétations des fractions afin de pouvoir les identifier lors des situations de classes observées et filmées et de nous donner les moyens de mieux cerner les difficultés de cet enseignement.

2.3 Les différentes difficultés conceptuelles connues sur les fractions.

2.3.1 Grandeur continue, grandeur discrète : des différences de tâches selon les grandeurs.

Dans les paragraphes ci-dessus, nous avons rappelé que l'introduction des fractions se fait majoritairement à partir des fractions unitaires en lien avec des représentations de type « *galette, pizza, gâteaux* » de forme ronde. Ainsi, les fractions sont souvent étudiées, introduites dans le cas de grandeurs continues, les gâteaux et autres étant assimilables à des disques et les parts à des « *portions de surface* ». Nous pouvons alors dénombrer le nombre de parts sans forcément évaluer la mesure (le poids ou l'aire) d'une part.
Vergnaud (1983) et les écrits relevant du RNP distinguent les cas de l'enseignement des fractions à partir de quantités continues « *continuous quantity* » et dans le cas d'ensemble d'objets discrets « *a set of discret objects* ». Vergnaud explique[42] que

> *« les grandeurs peuvent être discrètes (un paquet de bonbons, des cartes à jouer) ou continues (une tarte, une bande de papier, une bouteille de limonade). La grande différence est que dans le cas continu on ne connaît pas la mesure de la part (que ce soit dans le cas de poids ou de parts de tarte) tandis que dans les cas discrets, on peut compter. Par conséquent, la valeur d'une part est nécessairement exprimée comme une fraction (un quart, un sixième) dans le cas continu, tandis que dans le cas discret, il est possible d'exprimer le nombre d'éléments (trois bonbons chacun) »* (Vergnaud 1983,p.161)

2.3.2 Conservation du tout dans le cas continu.

Conceptuellement, Fridman (2008) rappelle que Piaget et Inhelder (1966) soulèvent une autre difficulté, dans les cas de grandeurs continues, celle de la conservation du « *tout* », pour les enfants de moins de 6 ans car la division d'un entier en parts signifie qu'il cesse

[40] (http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_4-5-6_NSN_fasc2.pdf).

[41] (http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/RNP1-13-grade3/RNP1_complete-grade3.pdf consulté le 11 fevrier 2015)

[42] *Nous traduisons la citation en anglais dans l'ouvrage « Acquisition of mathematics concepts and processes »*

d'exister en tant qu'entier. Parrat-Dayan (1991) observent que cette conservation semble pouvoir être plus ou moins acquise vers 9-10 ans dans des cas de formes homomorphes[43]. Les enfants de 9-10 ans ont du mal à concevoir que pour un même rectangle la moitié du rectangle subdivisé verticalement ait la même mesure d'aire que la moitié « *horizontale* ». C'est pourquoi il semble que l'étude des aires pourrait être un pré requis à l'étude des fractions dans les cas continus.

En France l'étude des fractions se fait plus tardivement (grade 5, 9-10 ans) que dans les pays anglo-saxons. Ces derniers commencent l'étude du « *partionning* » et de l' « *equivalence* » dès le grade 3 (enfants de 6-7 ans).

2.3.3 Pluralité de l'unité et équivalence des fractions.

Dans le cas discret, la pluralité de l'unité prend tout son sens. Pour expliquer cela, nous allons nous appuyer sur un exemple. Considérons que dans un magasin il y a 12 boîtes contenant chacune 4 pochons de 3 dragées. Chaque boîte représente une unité constituée de 4 pochons de 3 dragées chacun. Chaque dragée représente une unité (un singleton), et chaque pochon représente une unité contenant ces trois singletons. Ou encore 1 boite vaut 4 pochons de 3 dragées 1((4)(3 d'unité de dragées). Nous pouvons illustrer ce problème ainsi :

<table>
<tr><th colspan="2">Deux collections de 12 objets organisées en plusieurs « valeurs » de l'unité.</th></tr>
<tr><td>●●●●●●
●●●●●●
Chaque dragée c'est une unité.
Un sac de 12 dragées en vrac c'est une unité : l'ensemble des dragées c'est aussi une unité.

Si bien qu'un sac vaut 12 dragées. (1(12 unités))</td><td>●●● ●●●
●●● ●●●
Une boîte c'est 4 pochons. Chaque pochon représente une unité de trois dragées (trois singletons). 1((4)(3unités))</td></tr>
<tr><td>Déterminer les $\frac{6}{12}$ de cette quantité. C'est prendre 6 dragées sur les douze. La fraction se lit comme un codage, la collection entière c'est 12, on retire 6 dragées. C'est isoler la moitié de la collection.
Prendre la moitié de cette quantité, c'est effectuer un partage équitable entre deux personnes sans pour autant connaître le nombre total de dragées.</td><td>Prendre la moitié de cette quantité formée de 4 pochons c'est prendre deux pochons. C'est aussi prendre $\frac{2}{4}$ (deux quarts peuvent être lus comme deux pochons sur quatre). Puis dénombrer le nombre de dragées dans chaque pochon.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Des collections d'objets organisés différemment impliquent des usages des fractions différents. Assurer alors l'équivalence de $\frac{6}{12}$ et $\frac{2}{4}$ et $\frac{1}{2}$ou $\frac{3}{6}$ne se réalise qu'en dénombrant le nombre de bonbons</td></tr>
</table>

[43] *Même forme*

Nous avons vu que l'une des difficultés d'enseignement des fractions est attachée aux écritures des fractions équivalentes. Dans le cas de grandeurs discrètes, il est utile de se demander comment faire comprendre que $\frac{6}{12}$ c'est comme $\frac{2}{4}$ et comme $\frac{1}{2}$?

Quel sens donner au 1 dans « *prendre* $\frac{1}{12}$ *des dragées* » ou « $\frac{1}{2}$ *des dragées* » ? 1 ne signifie pas la même quantité dans les deux écritures. Dans l'une il peut renvoyer à une dragée parmi les 12, dans l'autre à 6 dragées (si $\frac{1}{2}$ est lu comme la moitié de…).

C'est cette pluralité de l'unité qui est conceptuellement difficile à appréhender par les élèves de 6 à 10 ans. D'autres difficultés apparaissent pour les élèves âgés de 6 ans, partager 5 pommes en 2 personnes n'est pas difficile s'ils ont accès aux demi-pommes. Les élèves de cet âge vont réussir la tâche en faisant un partage équitable et en mettant en correspondance chaque moitié de pommes tour à tour avec une personne puis l'autre.

En revanche la tâche qui consiste à déterminer la moitié de 5 pommes est moins réussie (sans la dimension de distribution entre deux personnes). Cela revient à considérer combien de moitiés de pommes il y a dans 5 pommes et s'autoriser ainsi à choisir comme unité de comptage la demi-pomme. Il y a 5 demi-pommes soit deux pommes entières et la moitié d'une pomme ou encore deux unités différentes de pommes (l'unité pomme entière et la sous unité demi-pomme).

Comprendre le concept de fraction passe aussi comme le souligne Parrat-Dayan & Vonèche(1991) par la construction de la notion d'unité

« *Nous avons mis en évidence que la notion d'unité, qui dans le domaine du continu doit être construite, n'est pas pour autant donnée d'avance dans le discontinu. Nous avons montré que le statut de l'unité change en fonction du problème posé et du développement de l'enfant.* »

Cela revient à comprendre la notion de commune mesure (ici la demi-pomme). Brousseau (1987) l'exprime ainsi :

> *« Ce « un » est malencontreux et rend difficile la conception des fractions plus grandes que l'unité : a/b c'est donc le résultat d'une opération matérielle qui consiste à partager des entiers et non seulement un entier en b parties que l'on peut considérer et déclarer égales, puis à prendre un nombre a de ces parties. C'est une définition constructive, elle se réfère à la manière de construire l'objet défini. Elle est bien adaptée à la construction d'une grandeur correspondant à un nombre donné (une unité étant donné). »* (Brousseau 1987, p.541)

Dans le cas continu, ce qu'il est nécessaire de comprendre c'est la possibilité de toujours pouvoir diviser l'unité de mesure choisie. Neyret (1995) explique que Bézout avait distingué des nombres complexes des nombres incomplexes. Bézout explique « *pour évaluer les quantités plus petites que l'unité que l'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites, ce qui conduit à la notion de nombre complexe comme « un nombre est composé de parties rapportées à plusieurs unités »* ». Cette définition s'applique à l'exemple ci-dessus de la moitié des 5 pommes.

2.3.4 Interprétation relationnelle visant une partie à un tout.

Les auteurs arabes du X^{ème} au XV^{ème} siècle avaient aussi compris que le concept de fraction passe nécessairement par la compréhension de la relation (du rapport) des deux entiers qui

la déterminent : la moitié du globe terrestre est plus volumineuse que la moitié d'une orange. Ce qui doit être considéré c'est ce qui se conserve quelles que soient les représentations choisies, c'est-à-dire le rapport que la partie entretient avec le tout. Dans notre exemple, les deux moitiés du globe forment le globe (conservation de l'entier) et chaque moitié est équivalente. Les mêmes relations existent entre les deux moitiés d'une orange. Les unités de référence sont différentes (globe terrestre et orange), une moitié c'est une moitié peu importe sa représentation et/ou ses représentants.
La question est en fait d'étudier comment on passe des nombres « *concrets* » en référence avec une représentation à des nombres « *abstraits* » sans référence à une quelconque unité ni représentation.
Dans les documents d'accompagnement des programmes de l'Ontario, nous pouvons lire :
« *l'enseignant ou l'enseignante doit présenter des situations d'apprentissages qui permettent aux élèves de découvrir qu'une fraction ne révèle rien de la* <u>*taille*</u> *du tout ou de ses parties ; elle nous renseigne seulement sur la* <u>*relation*</u> *qui existe entre un tout et ses parties.* »
Utiliser les fractions d'une quantité c'est construire une première idée de ce qu'est un rapport voire de la proportionnalité. Nous développons d'autres exemples de cet aspect relationnel dans les paragraphes sur les différentes « *interprétations* » ou « *aspects* » des fractions.

2.4 Les différents « aspects »

Dans la littérature française, Neyret (1995) en s'appuyant sur des traités mathématiques plus ou moins anciens montre qu'en France on pouvait voir apparaitre ce qui peut être considéré comme des aspects des fractions. Par exemple, Neyret, rappelle les écrits de Bézout datant du XVIII^{ème} siècle. Bézout distingue les nombres concrets des nombres abstraits. Il définit les nombres concrets comme ceux dont on énonce en même temps « *l'espèce d'unités* ». Les $\frac{3}{4}$ d'une tarte les $\frac{2}{3}$ d'une bande sont en ce sens des nombres concrets. Les nombres abstraits sont définis comme ceux dont on n'énonce pas « *l'espèce d'unité*. »

Les recherches et les discussions sur les différents aspects des fractions ont fait l'objet de débat dans les pays anglo-saxons. Nous avons dû faire un choix sur le nombre d'aspects que nous avons retenu. Nous savons qu'à l'école et au collège, les deux aspects connus des professeurs et enseignés sont « *partis d'un tout* » et « *quotient* ». Les autres aspects sont ou mal connus ou intégrés plus ou moins naturellement dans les deux autres. Bien sûr les liens entre ces différents aspects sont étroits. L'utilisation des fractions dans ces « *aspects* » est « *contextualisée* » et dépend de leurs représentations (parts de tartes, aires à subdiviser, collection d'objets, droite graduée…) et des grandeurs en jeu (continue/discrète). Dans les études anglo-saxonnes, chaque interprétation des fractions est étudiée selon 4 axes (les symboles, les mots, les représentations et les manipulations possibles). Ce n'est pas l'objet de notre travail de décrire de manière exhaustive les résultats de leurs recherches, en revanche nous effectuons les emprunts nécessaires pour pouvoir analyser le plus finement possible nos données. C'est pourquoi nous retenons l'idée de garder ces 4 axes pour l'étude de l'enseignement des fractions et plus précisément des expositions de connaissances associées.
Les différents articles consultés nous permettent de nous positionner sur 5 interprétations des fractions « *parties d'un tout* », « *opérateur* », « *ratio* », « *mesure* » et « *quotient* ». Dans le paragraphe suivant nous allons en proposer des définitions et indiquer quelques-unes de

leurs « *singularités* », mathématiques et/ou didactiques.

2.4.1 Aspect : Partie d'un tout.

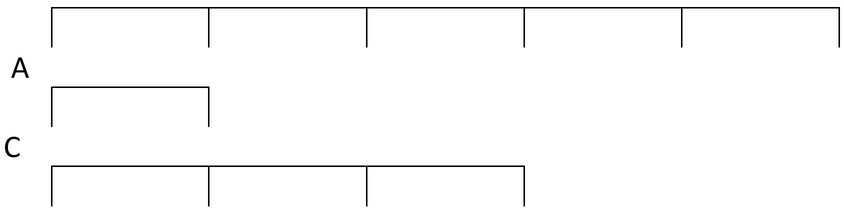
D'après une recherche récente, Alajmi (2012), l'aspect « *partie d'un tout* » est l'interprétation des fractions la plus enseignée, celle qu'on retrouve dans la plupart des manuels.
Cette interprétation s'applique aux fractions dites simples (plus petites que un). Par conséquent, le numérateur est plus petit que le dénominateur.
L'enjeu de cette interprétation est d'associer la fraction à un partage en parst égales à un représentant de l'unité (des aires dans le cas continu, des sacs de billes dans le cas discret). Pour ce faire, il est nécessaire d'avoir compris :
-que les 1/n parts, n non nul, d'une unité choisie sont équivalentes
-que la somme de l'ensemble des parts est égale à l'unité.
-que plus on partage l'unité plus la mesure des parts est petite (et inversement)
-que la relation entre la partie et un tout reste la même quelles que soient la taille, la forme et l'orientation du représentant choisi.

D'un point de vue mathématique dans ce contexte de fraction inférieure à 1.
Cette interprétation de la fraction n'est pas propre à induire d'inverse, si un morceau de tarte représente $\frac{3}{4}$ de la tarte, il n'est pas possible d'établir que l'inverse $\frac{4}{3}$ (quatre tiers) de la tarte ait du sens (bien qu'il soit possible de partager 4 tartes en 3 personnes, c'est l'aspect de la fraction-quotient qui est alors travaillé).
Il est possible d'additionner, de soustraire, d'ordonner à condition que les fractions « *de*… »fassent référence au même tout.
Il peut paraitre cependant difficile de passer de ces nombres « *concrets* » aux nombres abstraits.
En revanche dans ce contexte l'écriture fractionnaire est plus appropriée que l'écriture décimale, en effet manger 0.25 de la tarte n'a vraiment aucun sens.

2.4.2 Aspect : Fraction-Mesure

Cette interprétation-là englobe la précédente. Cet aspect de la « *fraction-mesure* » est en jeu lorsqu'est isolée une fraction simple (par exemple ¼) et qu'on peut exprimer une nouvelle mesure en fonction de celle-ci ci : Par exemple $\frac{3}{4}$ u=3x$\frac{1}{4}$ u. C'est-à-dire qu'on associe à $\frac{3}{4}$ le fait de prendre 3 fois une part de $\frac{1}{4}$ ou reporter 3 fois un segment de $\frac{1}{4}$ de l'unité choisie, ou encore 3 paquets des $\frac{1}{4}$ de la totalité des bonbons. La mesure commune c'est $\frac{1}{4}$, on peut comparer un segment de $\frac{3}{4}$ et de $\frac{1}{4}$ et établir des relations entre (l'un étant trois fois plus grand ou un tiers plus petit).
Cet aspect-là ne laisse pas travailler l'inverse, en revanche la multiplication de deux mesures est possible mais renvoie à un changement de dimension (mesure d'une surface).
C'est avec la commensuration que l'inverse devient possible et fait le lien avec l'aspect «*ratio* »
Cette interprétation permet la recherche de la commune mesure ou commensuration. L'ouvrage ERMEL (1982) en propose une définition : A et B sont commensurables, c'est-à-dire

quand il existe une même quantité C contenue p fois dans A (p $\in \mathbb{N}^*$) et q fois dans B(q $\in \mathbb{N}^*$)
C est appelée une commune mesure à A et à B
Grandeur continue



Grandeur discrète
D ●●●●● p=5
E●
F●●● q=3

La commensuration permet d'écrire que c=$\frac{1}{5}$a =$\frac{1}{3}$ b ce qui implique que a=$\frac{5}{3}$ b et b=$\frac{3}{5}$ a.
$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{3}$ sont des rapports qui mettent en relation les différentes mesures. Déterminer la commune mesure permet d'établir des rapports et des relations entre deux mesures. Ainsi l'expression $\frac{a}{b}$=$\frac{5}{3}$ peut se lire « *a est à b ce que 5 est à 3* » ou encore a= $\frac{5}{3}$ b et aussi b=$\frac{3}{5}$ a. En revanche l'écriture décimale a=1.666b ne permet pas d'établir des relations ni la mesure commune.

2.4.3 Aspect : fraction-ratio

Cet aspect des fractions se retrouve dans des cas de comparaison de quantité. Cette interprétation des fractions est en lien étroit avec la proportionnalité. Elle peut être mise en rapport avec l'aspect mesure dans le cadre de la recherche de la commune mesure.
Vergnaud (1983) en distingue deux cas (inclusif et exclusif) :

> *« - inclusif : Pierre mange 2 sur 5 des bonbons, trois sur quatre des chamalows sont bleus.*
> *Cette interprétation des fractions ne donne pas accès aux inverses, la fraction est nécessairement plus petite que 1.*
> *- exclusif : la collection des voitures de Pierre est trois quarts plus grande que celle de Jean.*
> *La distance couverte en 5 heures est les cinq tiers dans la distance couverte en 3 heures.*
> *L'interprétation ratio dans le cas exclusif se prête naturellement à concevoir l'inverse : la collection de Jean représente les* $\frac{4}{3}$ *de celle de Pierre. »* (Vergnaud 1983, p.163)

Deux formulations langagières permettent de distinguer les aspects mesure par rapport au ratio. L'expression « *b ième* » renvoie à la fraction-mesure l'expression « *sur* » au ratio.
D'après Leung & Carbone (2013) travailler l'aspect ratio, permet aux élèves de mieux comprendre la nature de la relation entre les deux quantités.
L'écriture décimale dans cette interprétation sera plus ou moins heureuse. Dire que la collection de Pierre est 1.333 de celle de Jean a peu de sens, alors que dire qu'elle est une fois et demie plus grande (1.5) aurait du sens. Quoi qu'il en soit, l'aspect décimal gomme les

relations qu'entretiennent les deux grandeurs puisqu'un seul nombre apparait. En effet l'expression du rapport dans la commensuration permet d'établir les relations qui existent entre une mesure et une autre. Dire que la commune mesure est 0.333 ne relève pas des mêmes représentations (au sens de Julo) que dire que la mesure commune est de $\frac{1}{3}$.

2.4.4 Aspect : fraction-opérateur

L'aspect opérateur est celui qui décrit la fraction comme opérant sur une quantité. Le coefficient de proportionnalité dans les cas de réduction et d'agrandissement de figures peut être considéré comme un opérateur. Cet opérateur d'après Vergnaud (op.cit) n'a pas de dimension et n'a pas d'unité, il est lié au raisonnement proportionnel[44]. Il est possible d'enchainer les opérateurs.
Il n'y a pas d'additions ni de soustractions possibles de la fraction-opérateur. Si l'on agrandit une figure selon le coefficient $\frac{5}{3}$.puis selon le coefficient$\frac{3}{2}$. cela revient à agrandir la figure de $\frac{5}{2}$. et non de $\frac{19}{6}$. (qui serait la somme des coefficients).
Cette interprétation des fractions permet d'envisager l'augmentation ou la diminution de quantité d'objets. Cette fraction n'est pas un « *nombre concret* » au sens de Bézout.
La fraction-opérateur admet naturellement une interprétation de l'inverse.
L'écriture décimale pour un opérateur a du sens mais gomme les relations entre les entiers plus visibles sous l'écriture fractionnaire. Un coefficient d'agrandissement de 7/4 peut être lu comme un côté de 4 cm devient 7cm dans la figure agrandie (et par conséquent 8 cm deviennent 14), ce que ne dit pas 1.75. Que ce soit sous les aspects ratio ou opérateur, l'écriture fractionnaire peut favoriser le raisonnement proportionnel.
Dans les programmes de l'Ontario on peut lire que cet aspect de la fraction est un intermédiaire avant d'en comprendre l'aspect quotient.

2.4.5 Aspect : fraction-quotient

Cette interprétation est le résultat d'une division qui peut être présentée comme partager 4 pizzas entre 3 convives, ou 3 pizzas en 4 personnes. D'après Leung &Carbone (2013) cette interprétation permet aux élèves de bien comprendre le rôle du dividende et du diviseur dans la division.
Ainsi cela contribue à faire comprendre que le reste d'une division euclidienne peut s'exprimer par une écriture fractionnaire, le numérateur étant le reste trouvé dans la division euclidienne correspondante et le dénominateur étant le diviseur.
4= 3x1 +1 ou $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$
L'aspect quotient permet d'écrire $\frac{1}{2}=0.5$ et $\frac{2}{4}=0.5$, on en déduit par transitivité l'égalité $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.
Pour autant on ne peut en déduire les équivalences des écritures des fractions. Il n'est pas

[44] *Le raisonnement proportionnel est un raisonnement identifié dans les programmes de l'Ontario. Nous empruntons cette définition à un site canadien, netmaths : Procédé de résolution de problème par raisonnement mathématique dans lequel interviennent des rapports ou une proportion. Pour résoudre un problème à l'aide du raisonnement proportionnel, il y a d'abord lieu de reconnaître dans la situation qu'une quantité ou une grandeur est liée à une autre par un rapport déterminé.*
https://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/ProportionReasonFr.pdf
*https://www.netmaths.net/lexique/**raisonnement**%20**proportionnel***

nécessaire de « *calculer le quotient et d'exprimer le résultat selon l'écriture décimale* » du quotient pour écrire $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.

2.4.6 Composition de ces « aspects »[45] :

Ces interprétations sont souvent composées entre elles : ainsi déterminer la moitié d'une demi- part de tarte permet de passer d'une interprétation à une autre.
On peut d'une part lire un demi ($\frac{1}{2}$) comme une fraction opérateur qui s'applique à la quantité choisie moyennant les règles d'utilisation d'un opérateur multiplier par le numérateur et diviser par le numérateur). D'autre part, on peut déterminer ce que la moitié de cette moitié de tarte représente par rapport à un tout. La difficulté est de reconsidérer la sous unité de l'unité (demi-tarte) dans l'unité (toute la tarte) de référence.
bilan :
Selon l'aspect (lié assez souvent à un contexte) des fractions, certaines des propriétés connues (multiplication, addition, inverse) ont un sens ou pas. Selon le contexte il est ainsi impensable de penser l'inverse ou l'écriture décimale. Peut-on alors enseigner les fractions en n'envisageant qu'une seule de ces interprétations ? Pris à part chacun de ces aspects a des limites, ils sont par ailleurs très dépendants de leurs représentations et de leurs contextes. Est-ce que la spécificité de l'écriture fractionnaire (relation entre deux entiers) est enseignée, prise en compte ?
Dans les programmes successifs, les fractions ont été enseignées avec des objectifs différents : parfois en forte relation avec la proportionnalité, parfois comme un jeu d'écriture avec des opérateurs et actuellement comme un nombre.
Dans le paragraphe suivant consacré aux différents programmes qui se sont succédé en France, nous allons avoir un aperçu des tâches prescrites par les programmes en fonction de l'aspect des fractions.

2.5 Les programmes successifs de l'école : les choix d'enseignements.

Analyser les programmes permet d'avoir une idée des savoirs à enseigner prescrits par l'institution. De plus cela offre la possibilité de donner, parfois, du sens aux pratiques des professeurs des écoles. En effet, les programmes peuvent marquer particulièrement les pratiques des professeurs. D'une part les programmes en vigueur lors de la formation initiale sont souvent travaillés (plus qu'à d'autres moments de la carrière) car leur connaissance est nécessaire à l'obtention du concours puis à la titularisation. Les programmes sont également retravaillés avec soin lors des épreuves pour passer des examens comme ceux de maître formateur. D'autre part, les programmes antérieurs que les professeurs des écoles ont pu vivre en tant qu'élève peuvent marquer leur conception des mathématiques. Pour nous, ce détour sur les programmes depuis qu'ils existent nous permet de montrer comment les injonctions sur un même objet d'enseignement ont évolué en fonction de la place accordée à cet objet mathématique dans notre société.

2.5.1 Les programmes de 1887-1905

[45] *ou interprétations.*

Les premiers programmes de l'école élémentaire sont très vagues sur les indications apportées sur l'enseignement des fractions. Nous pouvons lire « *avoir une idée générale des fractions* » suivie de « *les fractions décimales* ». Pour obtenir des éléments plus développés, nous avons consulté des manuels ou le « *dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire* » de Ferdinand Buisson qui donne des indications des tâches à proposer et des connaissances en jeu plus précises.
Les manuels de cette période s'appuient d'après ERMEL (1982) sur ce dictionnaire de pédagogie. Celui-ci propose une liste d'articles sur des mots et concepts clefs en lien avec l'enseignement. Dans le tome 2, nous trouvons des articles sur la numération, des définitions d'une unité (article rédigé par Bovier Lapierre), d'une unité fractionnaire et d'un nombre fractionnaire. Le premier contexte évoqué pour définir unité fractionnaire et fraction est celui des mesures de longueurs. Les unités fractionnaires apparaissent pour répondre à la nécessité d'exprimer une quantité plus petite que 1 : ce sont donc des subdivisions de l'unité (dans l'exemple le mètre). Le mot fraction signifie partie, portion de quelque chose. L'article développe l'idée de la commune mesure : « *on appelle donc unité fractionnaire une partie quelconque de l'unité entière qui est employée aussi comme unité pour la mesure d'une quantité* ». L'auteur distingue les unités fractionnaires, les nombres fractionnaires et les fractions (seulement les fractions plus petites que 1), ainsi 5/3 de mètre est un nombre fractionnaire et $\frac{2}{3}$ de mètre une fraction. L'aspect des fractions enseigné semble du côté de l'aspect « *fraction-mesure* ».
Plusieurs autres articles sont développés, de leur lecture nous conservons l'idée des liens étroits qu'entretient l'étude des rapports, de la proportionnalité et de la fraction. Dans la partie qui traite de la résolution de problèmes, nous lisons :

> « *les maîtres redoutent d'introduire dans leurs écoles la notion de rapport et l'idée de la proportionnalité. Ces deux mots les effraient et j'avoue que cet effroi serait légitime, s'il pouvait être question de développer devant les enfants la théorie complète des rapports et des proportions, et de leur en faire faire l'application à la résolution des problèmes…Il me paraît indispensable, dès que les enfants ont étudié la division et les fractions, de leur montrer le rôle que jouent dans maint problème les quotients ou les fractions formées par les nombres donnés.* ».

L'auteur complète qu'il est curieux de ne pas oser nommer ce qui est devant les yeux de l'enfant.
Une idée de la progression envisagée apparait, les fractions sont introduites dans un contexte de mesure de longueur, elles sont utilisées en calcul mental mettant en jeu d'autres grandeurs « *combien de quarts d'heures dans 2h15 ?* » mais aussi comme opérateur dans ce type de problèmes « *on demandait son âge à une jeune fille, elle répondit : les cinq huitièmes de mon âge font 10 ans* ». Les fractions peuvent exprimer des quotients et des rapports de proportionnalité. L'étude des décimaux n'est pas en lien direct avec l'étude des fractions et a lieu après l'étude des fractions. Les différents aspects des fractions semblent être travaillés sans pour autant annoncer leur statut de nombre.

2.5.2 Les programmes de 1923 et les programmes de 1938

L'objectif de ces programmes est essentiellement de préciser des horaires et des orientations sur les méthodes d'apprentissage et la constitution des classes.
L'école devient obligatoire jusqu'à 14 ans. Les autorités de 1938, sans modifier celles de 1923, ont ajouté des instructions pour le cours supérieur.
Nous pouvons lire dans la rubrique « *calcul et arithmétique* » : « *Nombres décimaux et fractions décimales. Idée générale des fractions ordinaires. Pratique des quatre opérations sur les fractions ordinaires dans des cas numériquement très simples* ». Tout comme les programmes de 1882, les textes sont assez laconiques. L'étude des décimaux est positionnée en premier dans cette liste ce qui laisse supposer que l'enseignement des décimaux précédait celui des fractions. ERMEL (1982) explique que ce sont les programmes de 1923 qui engagent les maitres dans la voie d'inverser l'ordre traditionnel de présentation : fraction puis décimaux. Les arguments évoqués sont qu'il existe un moyen simple et concret accessible à tous de définir les décimaux sans utiliser les fractions : les utiliser pour exprimer des mesures (3,5m…). La virgule est un signe qui indique l'unité choisie : dans l'écriture 3,5m, les mètres sont l'unité de référence, le 5 ce sont les$\frac{5}{10}$ de m soit les décimètres. Les fractions pour exprimer des mesures sont évitées.

2.5.3 Les programmes de 1945

Dans ces programmes les fractions sont considérées comme des multiplicateurs abstraits (que nous qualifions d'opérateurs selon nos définitions). L'accent est mis sur l'enseignement des décimaux, les concepteurs des programmes se félicitant que cet enseignement devienne consistant dans les classes de l'école. Ainsi, calculer les $\frac{4}{5}$ revient à « *Il suffit pour cela de diviser la mesure de la grandeur par 5 et de multiplier le quotient obtenu par 4* ».
L'addition et la soustraction ne sont à calculer que dans des cas simples. Ils ajoutent que « *Les maîtres se rendront compte qu'avec nos habitudes actuelles, ces problèmes pratiques sont de plus en plus rares. En outre, dans chaque cas, il est possible d'utiliser des nombres proportionnels.* » Ce paragraphe sera illustré d'un exemple montrant les avantages d'un raisonnement avec des « *nombres proportionnels* » plutôt qu'avec des fractions.
Ce qui importe, dans ces programmes, c'est de comprendre l'équivalence des écritures 2m15 cm=2,15m
Les commentateurs des programmes de cette époque exposent plusieurs arguments pour ne pas commencer à exposer une théorie de la mesure au moyen des nombres fractionnaires (cité dans Neyret 1995 p.102)
Celui que nous retenons est : « *les décimaux sont largement suffisants pour les problèmes de mesure, puisque ce sont les seuls utilisés* ». Nous retrouvons ici l'argument pragmatique, les décimaux doivent être enseignés en priorité car visibles dans la vie courante.

2.5.4 Les programmes de 1970

Les fractions sont enseignées comme des opérateurs et des suites d'opérateurs. Il n'y a pas de lien explicite dans les programmes entre fractions décimales et nombres décimaux, ni entre les fractions et la proportionnalité. Ces programmes, imprégnés du mouvement des maths modernes, sont un tournant pour l'enseignement des mathématiques à l'école. Pour notre propos, ce que nous retenons, c'est que les fractions n'ont pas un statut de nombre, qu'elles sont seulement utilisées sous l'aspect opérateur, aspect qui commençait à être privilégié dans les programmes antérieurs. Neyret (1995 p.111) cite La circulaire du 19 février 1973 qui rappelle « *qu'il n'y a pas lieu d'éviter le mot fraction ; si on l'introduit, il désignera l'écriture d'un quotient.* »

2.5.5 Les programmes de 1980 et 1985

Les programmes de 1980 s'inscrivent plus dans la lignée de ceux de 45. Dans la rubrique « *écrire nommer et comparer les décimaux* », les fractions et les décimaux sont cités comme étant des nouveaux nombres. Il est également recommandé de savoir passer d'une écriture à une autre (fraction décimale, écriture à virgule). Il est rappelé très clairement que l'objectif du cours moyen c'est l'enseignement des décimaux. Les fractions sont enseignées dans le cadre de mesure (indication sur les verres mesureurs en cuisine, l'heure), et doivent être situées par rapport aux nombres décimaux.
La proportionnalité est étudiée dans le cas des fonctions numériques, il s'agit de produire d'autres couples de nombres à partir d'un couple donné. La fraction garde dans les calculs son statut d'opérateur.
Les programmes de mathématiques de 1985 sont très courts, les fractions sont évoquées dans la rubrique arithmétique, l'enseignement de ces dernières semble tenir à une présentation des fractions simples.

2.5.6 Les programmes de 1991.

Ces programmes marquent une tentative de changement structurel, les niveaux d'enseignement sont regroupés pour former trois cycles. Les anciens CE2, CM1 et CM2 forment le cycle des approfondissements. Le texte oblige également à l'élaboration de projet d'école afin de fédérer les équipes autour de problématiques spécifiques à l'école.
L'enseignement des fractions est celui de l'utilisation d'écritures fractionnaires usuelles (demi, tiers, quarts, fractions décimales) et du passage d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire décimale. C'est la première fois dans des programmes qu'on écrit qu'il faut travailler la signification des chiffres dans l'écriture à virgule.
Pour la proportionnalité, il s'agit de proposer une première approche dans des cas simples. Les liens entre fraction et proportionnalité ne sont cependant pas explicités.
Neyret (1995) dans ses commentaires sur ces programmes ajoute que « *cette expression fractions simples rejette évidemment celles-ci au rang des accessoires, même si dans les instructions, on évoque une situation possible faisant appel aux fractions* »

2.5.7 Les programmes de 2002

Ces programmes proposent un article intitulé : connaissance des fractions simples et des décimaux. Dans cet article, il est rappelé que :

> *« les fractions et les nombres décimaux doivent apparaitre comme de nouveaux nombres, utiles pour traiter des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante : problème de partage, de mesure de longueurs ou d'aires, de repérage d'un point sur une droite. Les fractions sont essentiellement introduites en cycle 3 pour donner du sens aux nombres décimaux ».*

La fraction opérateur est abandonnée. Une liste de tâches à effectuer avec les fractions est proposée : « *les fractions simples : utilisation, écriture, encadrement entre deux nombres entiers successifs, écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1* »
Les compétences de fin de cycle précisent qu'il est nécessaire de pouvoir :
« *-utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures de longueurs ou d'aires, une unité étant choisie, ou pour construire un segment (ou une surface) de longueur (ou d'aire) donnée ;*
- nommer les fractions en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième... ».
Ces programmes sont accompagnés de documents d'application et d'accompagnement qui précisent un peu plus ce qui est attendu des maitres. On peut retrouver des indications sur la définition de dénominateur et numérateur comme : « *Le « dénominateur » nomme le type de partage de l'unité (en parts égales) alors que le « numérateur » précise le nombre de parts qui sont reportées. Ce vocabulaire peut être utilisé en situation, mais il n'est pas exigible de la part des élèves. La notation 2/3 sera évitée.* » (barre oblique)
Des indications sont apportées pour l'introduction des fractions dans les cas simples ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$…). Il est préconisé d'utiliser des pliages de bandes de papier ou des réseaux de lignes parallèles équidistantes, afin de partager une longueur en plusieurs longueurs égales, sans recours à la division.
La fraction mesure est privilégiée ainsi que les tâches de « *partionning* ». L'équivalence des écritures est encouragée à être travaillée ainsi que les « *conversions* » des écritures fractionnaires aux écritures décimales.
L'abandon de la fraction quotient et l'aspect opérateur marquent une rupture. Certaines tâches comme calculer les $\frac{3}{4}$ d'une longueur de 320 km et la distance qu'il reste à parcourir, deviennent rares voire absentes des manuels scolaires[46]. La tâche est possible si on cherche en premier lieu combien de fois il y a 4 dans 320 puis qu'on prenne 3 fois cette longueur. Ce qui revient à exprimer la mesure du quart d'un tout qui vaut 320 (ici ¼ u=80). Il ne reste plus qu'à formuler que cette distance a été parcourue 3 fois 80x3=240 km. On en déduit qu'il reste bien 80 km à parcourir.
On pourrait également prendre 3 fois l'unité (320) puis chercher combien de fois quatre dans 960 (qui est ici la mesure de 3u) ce qui semble peu naturel, la distance parcourue étant de 320 km et non de 960.
Ce raisonnement est peu connu, la plupart des professeurs des écoles ayant appris que ¾ de 320 c'est 320x3 puis divisé par 4, pour déduire la distance à parcourir il est nécessaire de faire une soustraction (320-240).
Enfin, et ceci n'est qu'une appréciation, abandonner la fraction opérateur peut contribuer à appauvrir les tâches quant à l'enseignement de la proportionnalité puisqu'on se prive des coefficients de proportionnalité exprimés sous l'écriture fractionnaire. L'ouvrage Cap Maths (2002) pour les situations traitant de la proportionnalité ne propose, par exemple au mieux que des coefficients 1,5 (ce qui revient à additionner un nombre à sa moitié).

2.5.8 Les programmes de 4 Avril 2007- 19 juin 2008

Nous allons un peu plus détailler ces programmes car ce sont ceux en vigueur lors de notre

[46] *pour ceux que nous avons consultés car souvent conseillés en formation : Cap Maths et Euro Maths*

étude.
Les programmes de 2007 suivis de quelques correctifs en 2008 inscrivent le travail sur les fractions dans la rubrique : l'étude des nombres et calcul et la sous rubrique : « *Les nombres décimaux et les fractions* ». Le contenu du programme est proposé comme une suite de tâches à réaliser sans autre explication.
« *fractions simples et décimales : écriture, encadrement entre deux nombres entiers consécutifs, écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur* ».
On retrouve des indications de situation : fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs. Les autres tâches : « *placer sur une droite graduée, encadrement par des entiers consécutifs, écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1* », reprennent les tâches entre autres des programmes de 2002. En revanche le peu d'indications sur le comment et le pourquoi de cet enseignement fait qu'elles sont entièrement à la charge du PE. Dans le tableau suivant nous montrons des extraits de la programmation proposée pour le cycle 3.

CM1	CM2
Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	Fractions - Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur
Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème). Savoir : - les repérer, les placer sur une droite graduée, - les comparer, les ranger, - les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, - passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement	Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). Savoir : -les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, les comparer, les ranger, - produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... - Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.

Nous revenons également sur cette partie du programme « *Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.* ». Deux interprétations des fractions apparaissent : l'une sur les partages dits simples, que nous mettons en relation avec l'usage des fractions simples (aspect partie d'un tout) et l'autre sur le codage de mesures de grandeurs (relevant plus de l'aspect mesure). Cette dernière instruction est extrêmement vague. Doit-on utiliser toutes les grandeurs, qu'appelle-t-on codage de mesures ? Doit-on enseigner la fraction quotient ? opérateur ?
Les lecteurs de ces programmes ne les interprètent pas de la même manière selon leurs connaissances mathématiques et didactiques et leurs connaissances des programmes

précédents.
En 2012 un document qui vise à aider et orienter les pratiques est édité : le nombre au cycle 3.
Ce document recueille des articles de formateurs et de chercheurs en mathématiques. Barilly & Le Poche (2012) proposent un article d'une dizaine de pages sur les fractions. Ils y définissent un nombre fractionnaire (Annexe 1)

Leurs propositions font apparaitre explicitement, pour des professeurs qui ne sont pas spécialement à l'aise avec les mathématiques, que la fraction est un quotient. Cette définition donnée dans les premières pages laisse peu de place aux autres aspects bien que trois d'entre eux soient détaillés.
La barre de fraction appelée aussi « *trait* » de fraction est directement assimilée à une division et « $\frac{a}{b}$ » à un quotient. Pour Perrin et Brousseau cette barre de fraction devait évoquer la relation (relation d'équivalence) entre les deux entiers. Ce point de vue est en rupture assez forte avec les programmes de 2002 et n'apparait pas explicitement dans les programmes en vigueur.
L'article, à plusieurs reprises, montre que la fraction doit être envisagée sous son aspect quotient :

> *« à l'école élémentaire, les fractions $\frac{5}{3}$ ou $\frac{7}{2}$ doivent être interprétées comme 5 fois le nombre $\frac{1}{3}$ ou 7 fois le nombre $\frac{1}{2}$ mais pourront aussi être vues comme des quotients, c'est-à-dire les résultats respectifs des divisions par 3 de 5 et par 2 de 7 :*
> *-le tiers de 5 pour l'une, la moitié de 7 pour l'autre*
> *-le nombre qui multiplié par 3 donne comme résultat 5 pour l'une, le nombre dont le double est 7 pour l'autre.*
> *L'introduction de la division décimale permet ensuite d'établir que 1.666 est une valeur approchée au millième de 5/3 et que 3.5 est une écriture décimale de 7/2. »* (Barilly & Lepoche 2012 p.96)

Nous ajoutons qu'avec des fractions équivalentes nous pouvons arriver aux mêmes résultats sans pour autant effectuer la division.Pour l'exemple de $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{2}$=$\frac{35}{10}$ (en utilisant une droite graduée) ou encore $\frac{7}{2}$=$\frac{6}{2}$+$\frac{1}{2}$ $\frac{7}{2}$=3+$\frac{1}{2}$ (les élèves auront établi les équivalences d'écriture suivantes $\frac{1}{2}$ =$\frac{5}{10}$ =0.5).
Effectivement, pour obtenir l'écriture décimale de $\frac{5}{3}$. il faudra avoir recours à la division car $\frac{5}{3}$ =1+$\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$ =0.6666.
Les tâches liées à l'équivalence de l'écriture des fractions sont plus complexes et requièrent d'établir des nombreuses substitutions. Utiliser la calculatrice pour déterminer le quotient, ou poser la division de 7 par 3 pour en déterminer le nombre décimal associé peut paraître plus accessibles dans le sens où la connaissance de l'algorithme de la division est un pré requis.

Pour réussir à concevoir que les fractions sont des nombres, les auteurs proposent de mesurer des bandes de papiers avec une unité qui ne permet pas d'exprimer la mesure avec des entiers. Ils recommandent d’avoir recours à différentes représentations (aires de différentes surfaces, mesures de segments), mais aussi à l’utilisation de bâtonnets pour favoriser la compréhension de la commensuration (les bâtonnets ne se pliant pas).Nos connaissances des ressources du premier degré nous permettent de dire que l’aspect commensuration est présent dans les manuels mais comme un savoir caché. Ce mot n’est ni évoqué dans les guides du maître ni dans les programmes et n’est pas spécialement connu des professeurs des écoles. Nous émettons l’hypothèse que nous n’observerons pas de pratiques de professeurs qui enseignent ou utilisent la commensuration.

Enfin, pour ces auteurs, concevoir la fraction comme nombre sera possible en liant à des activités sur les aires les segments des activités de graduation de droite. Placer les fractions sur cette droite graduée entre des entiers et des décimaux permettrait d’accéder à la fraction nombre.

Cela dit la partie sur le calcul des fractions rappelle qu’il faut se limiter à l’addition/soustraction de fractions simples car en CM2, « *l’addition des fractions simples n’est accessible qu’en référence à une situation concrète et des oralisations* »

Il n’est pas aisé à la lecture de ce document de savoir vraiment ce qui est attendu sur l’enseignement des fractions malgré des exemples de situations. La fraction est-elle un nombre ? Un quotient ? La réponse de ces auteurs semble être que l’expression de l’écriture décimale du quotient soit une bonne aide pour concevoir cela. Nous ne pensons pas qu’écrire $\frac{1}{3}$ =0.333 suffisent à concevoir que la fraction soit un nombre ni même que ce soit un quotient.

Un enseignant devra-t-il donner la définition de la fraction quotient tout en traitant de la fraction mesure en premier lieu ? Cette ressource sert-elle à outiller le professeur à faire classe ou à remettre à jour ses connaissances sur les fractions (moyennant quelques raccourcis mathématiques) ?

Cet article du nombre en cycle 3 évoque une possible progression sur cet enseignement sans être clairement explicite sur les moments où la définition de fraction-quotient devra intervenir.

La fraction-ratio n’apparait pas, la fraction opérateur est évoquée pour des tâches comme « *prendre les ¾ des tartelettes* » mais le raisonnement exposé repose sur des connaissances relevant du collège.

Chesne (1997) établit un rapport, à la demande des IA IPR en comparant les programmes de 1995 de l’école et du collège notamment sur la comparaison de deux aspects : l’aspect mesure (relevant de la primaire) et la définition de l’aspect quotient. Comme les programmes de 2008 ne semblaient pas proposer d’envisager la fraction comme quotient, son propos nous paraît donc adapté à la compréhension des programmes de 2008.

« *en sixième, le problème posé aux professeurs pourrait donc se décrire ainsi : les élèves sortent du cycle 3 en sachant que* $\frac{3}{4}$*x4 = 3, puisque* $\frac{3}{4}.+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}$ *. Il s’agit pour eux de leur faire comprendre que* $\frac{3}{4}$ *est aussi l’écriture d’un nombre tel que 4x*$\frac{3}{4}$*=3. On voit bien la différence entre « nombre qui est multiplié par » et « nombre par lequel il faut multiplier* ». »

Les exemples proposés dans le « *nombre en cycle 3* » semblent ne pas avoir pris en compte cette difficulté entre « *nombre qui multiplié par* » et « *nombre par lequel il faut multiplier* ».

Nous nous interrogeons donc sur l’impact de l’article du « *nombre en cycle 3* » dans les classes observées et du lien à faire pour les PE entre les programmes de 2008 et leurs accompagnements de 2012.

2.5.9 Synthèse sur les programmes.

Les enjeux explicités de l'enseignement des fractions ont connu deux ruptures : en 1970 et 2002.
En 1970 la fraction comme nombre n'est plus enseignée, ce qui est enseigné c'est la fraction opérateur.
Le travail sur les liens entre proportionnalité et fraction se délite et disparaît.
Il est alors difficile de trouver d'autres domaines des mathématiques dans lesquels les fractions seraient utilisées comme outils.
En 2002 la fraction comme nombre retrouve son statut mais perd définitivement ses aspects quotient et opérateur. Les programmes de 2008 semblent ne pas apporter de modification à ceux de 2002. En revanche le document de 2012 ne permet pas vraiment de cerner les enjeux et aspects réellement à travailler.
Le travail sur les fractions a parfois débuté avant celui des décimaux et réciproquement, parfois les liens étaient à peine échafaudés. Les programmes en vigueur choisissent de proposer d'abord un travail sur les fractions, suivi d'un autre sur les fractions décimales avant de découvrir les nombres décimaux.
Les deux aspects privilégiés sont « *aspect partie d'un tout* » et « *aspect mesure* » et plus précisément mesure de longueur et d'aire. Le travail mettant en jeu l'aspect quotient et ratio sont renvoyés au collège. De plus, les deux aspects « *partie d'un tout* » et « *mesure* » semblent être travaillés de manière préférentielle dans les cas continus. Il est possible de les travailler dans les cas discrets comme l'atteste un document d'accompagnement anglais mis en annexe 28.
Pour revenir à nos interrogations initiales, nous comprenons que l'enseignement des fractions est assez complexe : d'une part seulement certains aspects sont travaillés et plus particulièrement dans des cas continus ce qui peut être un frein à la conceptualisation de cette notion, d'autre part les fractions sont présentées comme des nombres mais pour lesquels la plupart des opérations connues ne sont pas possibles à effectuer compte tenu des restrictions du programme.

3 Conclusion.

Les écrits issus des travaux des Anglo-Saxons s'accordent pour reconnaitre 5 personnalités des fractions que nous avons nommées « *aspects* » ou « *interprétations* » des fractions. Pour les auteurs participant au Rational Number Project, ces aspects doivent être des objets d'étude explicite auprès des élèves. En revanche ces mêmes écrits cités disent peu sur le discours qui accompagne les différentes activités.
De l'étude de l'histoire des fractions et des programmes nous retenons une « *dilution* » voire une disparition des liens entre les fractions et le raisonnement proportionnel. Ce lien est toujours travaillé dans les pays anglo-saxons alors qu'en France il a été abandonné après la réforme des maths-modernes. Les choix français se sont orientés alors autrement.
L'étude que nous avons réalisée dans ce chapitre, nous permet d'orienter a priori notre regard sur différents points :

- sur les aspects des fractions travaillés effectivement
- sur les définitions proposées.
- sur l'introduction de leur écriture.

- sur la gestion de l’unité et la pluralité de l’unité dans le cas des fractions-mesure.
- sur les potentialités des situations choisies par les professeurs pour montrer que la fraction est un nombre.

Enseignants et élèves vont avoir à se confronter à un objet dont la construction a occupé de nombreux mathématiciens et cela pendant des siècles.

Le rôle de l’enseignant est alors en quelques séances de donner sens à cette construction et aux différentes écritures des rationnels. La transposition de l’ingénierie de Brousseau en milieu ordinaire apparait trop complexe et aussi trop longue (63 leçons sont consacrées aux fractions). L’ingénierie élaborée par Douady & Perrin-Glorian n’a pas pour ambition directe de construire le concept des fractions selon une genèse artificielle mais plutôt de proposer un ensemble de situations dans des cadres et des registres différents. Le pré-requis non explicité dans cette ingénierie est que la suite des situations ou les jeux de cadres suffiront à construire le concept de nombre.

La connaissance de ces ingénieries est importante car des parties de ces dernières comme l’introduction des fractions dans un contexte de mesure de longueurs pour Douady et Perrin-Glorian (1986) et le puzzle pour Brousseau font l’objet de nombreuses transpositions didactiques. Ce n’est pas l’ensemble des ingénieries qui est transposé dans les ressources pour les PE. Les enseignants enseignent souvent une partie de ces travaux sans les connaitre et sont conduits assez inévitablement à faire de rapides raccourcis ou généralisations qui peuvent paraitre abusives. L’objet de nos chapitres suivants va nous permettre d’une part d’avoir un regard sur les situations d’introduction choisies et réalisées par 5 enseignants (chapitres 4, 5, 7, 8) et d’autre part d’analyser les discours sur les expositions des connaissances pendant les séances de classe (chapitres 4 à 6) et enfin d’analyser et de comparer les écrits destinés à être appris par les élèves (chapitres 6, 7, 8).

Partie II

Chapitre IV – Solène : analyse des expositions de connaissances écrites

Ce chapitre est le premier de la partie 2 de notre travail. Trois chapitres sont consacrés à une enseignante : Solène. Le chapitre 4 va permettre d'analyser les Expositions de Connaissances écrites au regard des ressources utilisées sur une durée de 5 ans. Le chapitre 5 se consacre à analyser des EC orales produites lors de séances enregistrées de classe. Le chapitre 6 compare les EC orales produites sur les trois années de notre étude.
Le chapitre 4 a pour objectif l'étude des ressources utilisées et l'analyse des expositions des connaissances produites par une même enseignante sur cinq ans. L'étude de ce qu'emprunte l'enseignante aux ressources et l'étude de la reconstitution des sommaires des cahiers de leçons (ainsi que les fiches de préparation quand il y en a) vont nous permettre de reconstituer l'itinéraire cognitif construit par l'enseignante.
Le chapitre 4 comporte trois parties : présentation du projet global de l'enseignante à l'attention des élèves de CM1 et CM2 (fin d'école primaire), analyse des propositions des ressources au regard des choix effectués par l'enseignante et enfin analyse des expositions écrites de connaissances et leur évolution sur 5 ans.

1 Présentation du projet global et de son contexte

Pour construire des séances de classe articulées entre elles, les enseignants que nous suivons utilisent différentes ressources. Les Professeurs des Ecoles (PE) ont à leur disposition des ressources qui proposent des pistes à exploiter ou des textes à destination des élèves parfois intégrés dans le manuel ou bien dans des fascicules à part : cas du dico math pour le manuel Cap Math et de l'aide-mémoire du manuel Euro Maths. Nous n'avons pas l'intention d'analyser tout ce que ces ressources fournissent comme éléments d'institutionnalisation pour chacun de leurs itinéraires cognitifs. Pour une des PEMFs en particulier, celle dont les pratiques sont étudiées ici, nous allons pouvoir identifier ce qui est utilisé, ce qui est écrit et dit (chapitre 5) et qui relève de l'usage des ressources quant au PI. Trois sur quatre des enseignants que nous avons suivis utilisent les mêmes ressources. C'est pourquoi, nous allons commencer par présenter les ouvrages et proposer des analyses des activités retenues par les PE.
Nous n'analysons pas le projet présenté dans la programmation de l'ouvrage mais bien le projet de Solène. Solène emprunte ses activités à deux ouvrages et reconstitue à partir de ces derniers un nouvel itinéraire. Dans le chapitre 3, Solène nous livre les raisons de ces emprunts, nous allons détailler cela dans la suite du chapitre 4.
Nous allons présenter l'itinéraire cognitif d'une enseignante, celle pour laquelle la quantité de données est conséquente : Solène. Pour cette enseignante, nous allons pouvoir décrire et comparer les déroulements effectifs en classe pendant trois ans. Nous avons pu recueillir les cahiers de leçons sur 5 ans.

2 Ressources choisies par les enseignants.

Les trois enseignants dont nous allons décrire et analyser les pratiques lors des expositions des connaissances sur les fractions utilisent tous ERMEL et Cap Math CM1 et CM2 et dans une moindre mesure Euro Maths. Nous indiquons les noms des manuels car ils sont particuliers dans le sens où l'ancrage didactique des auteurs est fort. Les auteurs de ces manuels sont souvent des didacticiens ou en ont dans leurs équipes. Les autres manuels de l'école élémentaire sont plus souvent co-écrits par des inspecteurs, des conseillers pédagogiques ou bien encore des enseignants.
Butlen (2004) a ainsi montré que les manuels choisis ont une influence sur les pratiques des PE, qu'ils orientent et modifient ; mais à l'inverse, quand un PE choisit un manuel, il le fait en privilégiant ceux qui « *font écho* » d'une façon ou d'une autre à ses pratiques ou ses conceptions existantes, et ce choix révèle alors ce qu'il attend potentiellement du manuel, tout au moins dans le cas d'un PE confirmé. Depuis, Arditi (2011) a précisé cette relation manuel-conception.
Notons également que l'un des auteurs de Cap Math a fait partie pendant une très longue période de l'équipe ERMEL : il y a, bien que nous n'en fassions pas la preuve, de nombreux points communs entre les ressources correspondantes.
Solène a suivi plusieurs formations, notamment en formation continue, ce sont ces dernières qui ont orienté le choix de Solène sur ERMEL et Cap Math. Solène fait donc confiance aux ressources car elles sont conseillées par des formateurs. (Allard & Ginouillac 2014)
Julien, quant à lui, utilise ERMEL et Euro Maths pour les mêmes raisons. De même pour Sasha qui a découvert ERMEL en formation, elle compare l'ouvrage à une « *bible* ». Tous les trois expriment donc une grande confiance en leurs ressources
Solène (Mai 2014) nous livre ses remarques au sujet de l'utilisation de ces ressources, elle nous en explique un peu la « *genèse* » de leurs usages. La première année, Solène n'a utilisé que Cap Maths: « *j'ai passé des heures à faire toutes les fiches de prép*[47] *du Cap Math CM1 et CM2 et à faire les exercices. Je sais toujours ce que je fais et comment l'amener. Par contre, la pratique transforme la façon de travailler: je revois parfois mon approche l'année suivante.* » Effectivement l'année d'après, elle commence à utiliser ERMEL. Cap Math propose un découpage de l'année en 15 quinzaines, Solène la première année ne dépassera pas la quinzaine 8. Elle se forge alors l'opinion que ce manuel propose des séances mal calibrées. Elle explique aussi qu'elle s'autorise à ne plus suivre une seule ressource suite à la formation pour la préparation du CAFIPEMF.
« *Le cafi*[48] *a changé une chose : faire le lien, de penser en séquences. L'autre chose, c'est que je me suis détachée du manuel pour préparer des séquences sur une notion en allant vers ERMEL. Mais je n'y suis allée que parce que tu m'as fait découvrir ERMEL. Pour le cafi, j'ai mêlé Cap Math et ERMEL. C'est là que ça prend aussi beaucoup de temps : faire le lien entre plusieurs supports.* » Enfin et ce de manière très explicite, elle explique qu'elle s'appuie sur sa connaissance de la classe et sur sa confiance en ses gestes professionnels.

[47] Abréviation utilisée par Solène pour dire : fiche de préparation qui sont des fiches dans lesquelles elle écrit tout ce qui va lui servir pour dérouler son cours comme les consignes, voire les corrections des exercices.

[48] Abréviation utilisée par Solène pour parler du CAFIPEMF (examen professionnel qui valide des compétences de formateur).

« *Lorsque l'on vient me voir en classe, je n'ai pas la pression de montrer des exercices ou des activités qui peuvent être moins ficelés car je sais de quoi je parle. Un débutant doit davantage prendre de temps pour allier connaissances et pédagogie: prendre en compte les connaissances des élèves, utiliser celles-ci et faire des liens (notamment en français pour moi).* »

3 Eléments des programmations[49] des deux ressources utilisées.

3.1 Présentation de l'ouvrage ERMEL

L'ouvrage ERMEL n'est pas un manuel-élève, c'est une ressource à destination des professeurs des écoles. Il propose des situations[50] mais la rédaction des supports pédagogiques est à la charge des professeurs (bien qu'il existe des fichiers photocopiables associés). Pour chaque thème, les auteurs apportent des éclairages sur leurs choix didactiques et de la gestion de classe. L'équipe des auteurs est constituée de professeurs de mathématique du second degré, de chercheurs en didactiques des mathématiques et de maitres formateurs.
L'ouvrage est réactualisé au gré des programmes et de la recherche en didactique. Ainsi les différentes éditions n'offrent pas les mêmes parties théoriques. Nous avons consulté la deuxième édition, datant de 1982, la première nous semble très éloignée des programmes actuels.
L'édition de 1982 propose 50 pages théoriques sur les rationnels dont la partie mathématique est très consistante. L'édition de 1997[51] qu'utilise Solène propose une dizaine de pages sur ce même thème. Nous notons seulement la modification du contenu, nous ne sommes pas en mesure de dire si ces modifications sont dues à des choix éditoriaux ou à d'autres contraintes que nous ignorons. En revanche, pour un enseignant qui voudrait réactualiser ses connaissances mathématiques sur les rationnels l'édition de 1982 parait plus complète. Cette différence de contenu contribue à montrer qu'il y a un glissement d'un contenu théorique en mathématique vers une ressource plus « *clé en main* »moins centrée sur le contenu disciplinaire pur mais plus sur les activités de la classe.

3.2 ERMEL CM1 : description de la programmation proposée.

Dans la culture professionnelle des PE, les éléments de la programmation (programme sur l'année) sont ensuite détaillés en séquence. Chaque séquence fait l'objet de x séances d'environ 50 minutes. Ainsi il est possible de programmer l'étude des fractions en fin de CM1, d'en reprendre l'étude en début de CM2 et poursuivre sur les fractions décimales quelques mois plus tard. L'étude des fractions se décline alors en une ou deux séquences qui

[49] *Les sommaires se trouvent pp 578 -579 pour le ERMEL CM2 (1997) et pp 508-509 pour le ERMEL CM1(1997)*

[50] *Le terme Situation est utilisé dans le sens de la Théorie des Situations Didactiques explicitement par les auteurs de l'ouvrage.*

[51] *L'édition de 1997 est celle dont nous nous servons pour relever les indications données au sujet des EC. C'est aussi l'édition utilisée par Sasha et Solène.*

regroupent un ensemble de séances (de 3 à 7 bien que le nombre de séances ne soit pas normé).
ERMEL ne présente pas sa programmation en utilisant les mots appartenant à la culture professionnelle (contrairement à Cap Math et à Euro Maths) des PE. Leurs découpages se réalisent en thèmes (se rapprochent du programme) composés de plusieurs modules (qui peuvent être assimilés aux séquences). L'édition de 1997 propose 5 thèmes d'étude. Le thème 4 intitulé : mesures et autres nombres. Ce thème 4 est divisé en deux modules : « *mesures* » et « *fractions et décimaux* ». Quant au thème 2, il se nomme : « *connaitre les nombres et les calculs* ». Ce thème propose des activités qui impliquent des opérations avec les décimaux. Cependant, L'étude des fractions et des décimaux s'inscrit préférentiellement dans le domaine de la mesure (thème 4). Une programmation sur l'année pour chaque thème est donnée. L'année est divisée en 5 périodes. La plupart des modules des thèmes proposent des situations[52] pour chaque période. Chaque situation a un nom : les bandes, les pains…Le déroulement de chaque situation est décomposé en phases.
À la fin de l'ouvrage un planning général présente cette programmation et ses découpages. Devant les titres des situations, nous pouvons lire (2s) ce qui signifie que la situation peut se faire en deux séances. Dans le corps de l'ouvrage ce n'est pas indiqué. La compréhension du fonctionnement de cet ouvrage est une des difficultés que les enseignants de notre étude relèvent.
Nous pouvons a priori estimer le nombre de séances déclarées sur une notion en utilisant le tableau du planning général (dont on trouve un exemple p508 du ERMEL CM1). Nous nous intéressons aux séances dont l'objet d'étude est ces nouveaux nombres. Remarquons que les nombres rationnels sont utilisés dans d'autres séances mais n'en sont pas l'objet d'étude. (ex « *les pains* » p283 du ERMEL CM1) pour calculer le prix du pain connaissant son poids). Nous ne comptons pas ces séances.
ERMEL CM1 annonce (p508) 4 séances sur les fractions et 5 séances sur les fractions décimales. D'autres séances sont proposées pour étudier la comparaison des décimaux, ainsi l'étude « *des fractions aux nombres décimaux* » fait l'objet de 17 séances déclarées dans le module « *fractions et décimaux* ». L'étude des fractions (fractions et fractions décimales) fait l'objet de 9 séances.

3.3 ERMEL CM2 : description de la programmation proposée.

Nous retrouvons les mêmes intitulés de thèmes et de modules dans le ERMEL CM2 que dans le ERMEL CM1. Dans ERMEL CM2, deux séances sont consacrées aux fractions et une aux fractions décimales en tant qu'objet d'étude. Ainsi, l'étude des fractions aux décimaux représente d'après l'ouvrage 21 séances pour la seule année du CM2 dont 3 plus orientées sur l'étude des fractions pour le seul module « *fractions et décimaux* ». Les autres séances de l'année sont essentiellement centrées sur l'étude des décimaux et des règles de calcul associées[53]. Sur les deux années de cette fin de cycle, notre reconstitution des propositions du ERMEL, nous permet d'évaluer à 12 séances l'enseignement des fractions. L'ouvrage ne

[52] *Au sens de la Théorie des Situations Didactiques*

[53] Pour dénombrer le nombre de séances annoncées, nous avons utilisé le tableau présentant la programmation à l'année. Pour chaque situation est indiqué un nombre de séances entre parenthèses.

donne pas d'indications de temps donc nous ne pouvons rien dire sur la durée attendue pour le bon déroulement d'une situation. De plus ces ouvrages présentent le déroulement en le découpant en phases. Ce terme de phases n'est pas à mettre en relation avec des phases de dévolution ou d'institutionnalisation, il est utilisé pour marquer un découpage dans les activités. Nous ne savons pas si les phases correspondent à des séances ou elles sont des étapes pour une même séance. Solène interprète les phases comme des séances.

3.4 Présentation du manuel Cap Math

Nous décrivons l'édition utilisée par Solène. Cap Math (2003) est le nom d'une collection qui propose plusieurs outils pour le professeur et les élèves. Pour chaque niveau de l'école, Cap Math (2003) propose :
-un manuel à destination des élèves qui présente l'ensemble des situations et des exercices possibles sur une année.
-un fichier photocopiable[54] pour les activités géométriques.
-un fichier photocopiable qui propose des activités supplémentaires.
-un dico math qui expose les connaissances de l'année, cet ouvrage est à destination des élèves.
-un guide du maître qui propose une progression sur l'année des activités, du calcul mental à chaque séance, des indications de gestion mais aussi des éclairages didactiques.

3.5 Description des programmations prévues par Cap Math.

Cap Math inscrit l'étude des fractions dans le domaine « *nombres et numération* », seuls les décimaux apparaissent dans la partie calcul et mesure.
Les fractions sont enseignées à plusieurs moments de l'année. Leur étude commence à la deuxième période (CM1) et se poursuit tout le reste de l'année. L'ouvrage (sans compter ce que les auteurs appellent les « *entretiens* » qui sont des révisions proposées toute l'année) propose au moins 13 séances de 50 minutes sur les fractions et fractions décimales pour une année. Pour les compter nous avons utilisé le sommaire de l'ouvrage (pp. 2-3).Tout comme pour ERMEL nous retrouvons la présence des fractions ou des nombres décimaux dans d'autres domaines où ils ne font pas l'objet d'étude de la séance.
Notons qu'en nombre de séances déclarées Cap Math CM1 (13 sur un an) propose plus de séances qu'ERMEL (9 en CM1 et 3 en CM2 soit 12 en deux ans). Cap Math CM2 propose une programmation des nombres décimaux (premières séances de l'année) aux fractions dans un contexte de mesure d'aire en passant par l'utilisation de la droite graduée et des jeux d'écritures entre fractions décimales et nombres décimaux. L'année est découpée en 5 périodes d'enseignement et Cap Math CM2 propose des séances de la période 1 à la période 4.
Cap Math CM2 n'est pas utilisé pour l'enseignement des fractions par les professeurs que nous suivons.

[54] *Un fichier dit photocopiable est un fichier dont on achète les droits « à être photocopié ».*

3.6 Récapitulatif.

ERMEL et Cap Math inscrivent l'étude des fractions et des décimaux sur plusieurs périodes de l'année et sur deux ans. Le nombre de séances sur les décimaux est plus conséquent que sur les fractions puisqu'il est nécessaire d'étudier la comparaison, l'addition et la soustraction des nombres décimaux. Il est aussi prévu d'enseigner la multiplication d'un nombre décimal par un entier. Solène s'écarte très significativement des programmations proposées par les ressources (pas d'études des décimaux en CM1 notamment).

Tableau n° 1 du nombre de séances prévues sur les fractions et les décimaux en deux ans

Nombre de séances sur les fractions et fractions décimales prévues.		
ERMEL CM1 CM2	Cap Math CM1-CM2 (fractions et fractions décimales)	Solène sur deux années
9 en CM1 3 en CM2 Soit 12 séances	13 séances en CM1 10 séances en CM2 Soit 23 séances sur deux ans.	12 séances+ 3 séances d'expositions de connaissances Soit 15 séances.
Nombre de séances sur décimaux (opérations comprises)		
8 séances en CM1 11 séances en CM2 Soit 19 séances	7 séances en CM1 18 séances en CM2 Soit 25 séances	Une dizaine de séances en CM2 (année 2012-2013). Les nombres décimaux ne sont pas étudiés dans la classe de Solène en CM1.

3.7 Rapport de Solène avec ses ressources.

Nous avons montré comment Solène en est arrivée à utiliser deux ressources. Dans les extraits ci-dessous Solène nous livre ses réflexions sur l'usage de ces deux ressources : elle dit qu'elle « *alterne* » entre l'utilisation des ouvrages Cap Maths et ERMEL : *« Moi, je suis le livre et je fais confiance au support, parce que c'est bien fait. Au niveau du guide du maître, le Cap Maths même est plus détaillé [que ERMEL], puisque tu as toutes les procédures d'expliquées et tous les écueils que tu peux rencontrer ».* Elle poursuit en expliquant que les durées indiquées dans Cap Maths ne lui semblent pas correspondre à la réalité : *« (…) ta séance, elle dure 45 minutes, une heure ; alors que Cap Maths, tu as un temps donné qui est trop court, clairement trop court ; mais dans tout c'est trop court (…) »* et conclut en explicitant les raisons pour lesquelles selon elle les enseignants n'utilisent pas tous les guides du maître : *« (…) Il y en a certains, je comprends, qui disent : « ERMEL, c'est trop compliqué » ; parce que, parfois, tu as des formulations de consignes pas très claires au départ, qui sont écrites sur 3 lignes, 5 lignes, il faut la lire plusieurs fois. Moi, je suis bonne en maths, donc je finis par comprendre et par me l'approprier ; sauf que ceux qui ont des difficultés et qui font confiance au livre vont abandonner, vont faire autrement et vont prendre le livre sans utiliser le guide du maître… et là, tu n'as pas le déroulement ».* Ainsi, elle déclare faire confiance aux ressources utilisées, mais elle compte également sur son expertise de professeur pour combler des incomplétudes récurrentes qu'elle a identifiées. Elle pointe explicitement plusieurs de ces manques, notamment : sur des indications fiables de temps , sur le vocabulaire lié au découpage d'une séance et d'une séquence (l'usage habituel dans les fiches de préparation n'étant pas d'indiquer des phases) ; et sur le vocabulaire lié à la passation des consignes.

Malgré ces incomplétudes, Solène se sert conjointement de Cap Maths et de ERMEL et justifie ses choix par le fait que les situations proposées permettent souvent de *« faire manipuler les élèves »* (à propos de choix de séances sur les fractions, elle signale par exemple que *« manipuler des bandes, c'est plus facile que des tartes »*). Elle déclare combler ces manques par son expertise, par ses connaissances d'autres manuels et par son bon rapport avec la discipline. D'après elle, les collègues qui abandonnent l'usage de ces deux ressources sont des collègues qui ne peuvent combler seuls ces manques et/ou qui ne possèdent pas un bon rapport aux mathématiques.

Nous comprenons alors que Solène sait que le nombre déclaré des séances sur un thème donné ne correspond pas à ce qu'elle peut faire en 50 minutes dans une classe. C'est pourquoi elle est contrainte de revoir les itinéraires proposés par les manuels. Elle va devoir faire des choix sur les séances qui lui semblent les plus pertinentes et proposer un nombre de séances plus « *réaliste* » de son point de vue. Solène soulève également des difficultés avec les consignes proposées, c'est pourquoi nous serons attentifs à ces dernières.

Nous remarquons que le choix des ressources semble motivé par une reconnaissance indirecte des formateurs et par les activités que ces ressources proposent. La qualité ou non du contenu mathématique n'est pas évoquée mais plutôt le fait que ces ressources favorisent des manipulations.

4 Présentation de l'itinéraire cognitif proposé par Solène

4.1 Description du projet d'apprentissage.

Solène s'est autorisée à un découpage sur deux ans des apprentissages des fractions et fractions décimales. Cette « *souplesse* » s'explique également par le travail collaboratif en cours avec sa collègue Danièle mais aussi parce qu'elles avaient la possibilité de suivre pendant deux ans leurs élèves. Leur projet global est constitué de trois séquences :
- Séquence 1 : l'une sur les fractions (A B C D E F G H)[55]
- Séquence 2 : l'autre sur les fractions décimales. (J K L M).
- Séquence 3 : la dernière, que nous n'étudions pas sur les décimaux et les opérations avec les décimaux.

Deux évaluations suivront la séquence 1 puis la séquence 2.

Tableau n°2 de l'itinéraire cognitif constitué à partir des cahiers de leçons et des ressources

Année	Fractions	Eva	Fractions	Expositions des	affiche

[55] *Voir le tableau qui suit pour une description du projet.*

										décimales et nombres à virgules.				connaissances écrites.			
parties	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	EC1	EC2	EC3	EC4
1 (CM2)	●	●		●	●				●	●	●	●	●	●	●		●
2 (CM2)			●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
3 (CM1)	●	●		●	●		●		●					●	●		

La première séquence vise à découvrir la notion de fraction dans un contexte de mesure de longueur et la deuxième séquence concerne la notion de fraction décimale en s'exerçant essentiellement sur des droites graduées.
Solène utilise deux ressources : ERMEL CM2 et Cap Math CM1. Elle n'utilise pas le « *Dico Math* » associé au Cap Math qui propose des expositions de connaissances écrites.
Ces « *activités* » ne sont pas proposées aux élèves de façon chronologique, plusieurs parcours sont possibles. Nous en montrerons des exemples lors des analyses des transcriptions. Les parties A B C D E F G H I J K L et 4 expositions de connaissances prévues (EC1, EC2, EC3 et EC4) constituent les séances communes à Danièle et Solène. Les deux enseignantes se sont laissé des marges de manœuvre sur les séances correspondant à des séances de réinvestissement. L'enseignement des fractions et fractions décimales se compose donc de 13 séances dont la durée annoncée est en moyenne de 50 minutes sur l'ensemble des deux années du cycle. Ce nombre de séances est plus proche du nombre de séances déclaré des deux ERMEL (12) que des deux Cap Math (au moins 23). L'accent est mis essentiellement pendant l'année de CM2 sur les décimaux et leurs utilisations à l'instar du ERMEL CM2 et du Cap Math CM2.

4.2 Emprunts et articulations des deux ressources.

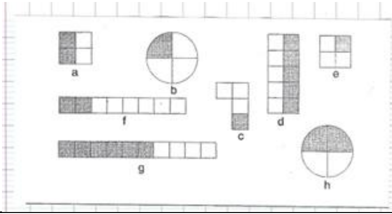
Nous avons reconstitué à partir des différents cahiers d'élèves et des fiches de préparation l'itinéraire cognitif tel qu'il a été conçu par Solène (Annexe 16). Pour l'enseignement des fractions, ERMEL CM1 et Cap Math CM2 sont écartés.
Elle utilise donc ERMEL CM2 et Cap Math CM1. Afin de comprendre quelles ont été les tâches sélectionnées et les expositions de connaissances associées, nous avons construit un tableau qui met en correspondance la ressource, les objectifs et les consignes telles qu'elles sont écrites dans la ressource.
Ce tableau met alors en évidence que le contexte privilégié pour ces enseignements est celui du contexte de mesure de longueur. Les activités choisies vont permettre de « *coder* » des mesures de longueurs et de trouver des écritures de fractions équivalentes $(\frac{1}{2}=\frac{2}{4})$.
L'addition et la multiplication de fractions quel que soit le dénominateur ne sont pas abordées conformément au programme. L'utilisation de fractions comme opérateur n'est pas abordée non plus. L'accent est mis sur l'usage des fractions usuelles selon la progression suivante : présentation des demis et des quarts, puis des tiers, et enfin des huitièmes et seizièmes pour terminer sur les dixièmes, centièmes et enfin les millièmes.
Le projet de Solène est donc d'enseigner les fractions en les présentant comme des nombres : Solène utilise Cap Math CM1 pour les séances d'entrainement et ERMEL CM2 pour les séances de découverte plus orientées vers la recherche. Nous notons que les consignes écrites dans les fiches de préparations sont identiques à celles notées dans les ressources. Nous avons vu que Solène est contrainte de s'écarter des programmations des

ressources car elle les considère trop chronophages. Elle choisit donc certaines séances qui semblent être jugées incontournables. Nous avons peu d'éléments permettant d'expliquer les raisons de ces choix si ce ne sont ceux évoqués ci-dessus. En revanche, elle reprend scrupuleusement les consignes des séances retenues. Dans sa fiche de préparation, elle reprend les objectifs du module (p452) « *donner une signification à des fractions simples, connaitre les relations entre ces fractions* » mais ne reprend pas les objectifs spécifiques (p453) « *Installer ou réinstaller une première signification des fractions simples (essentiellement $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$) dans un contexte de longueur. A ce stade la fraction $\frac{n}{p}$ ne représente pas le quotient de n par p, elle a pour signification « n fois $\frac{1}{p}$ ». $\frac{1}{p}$ correspondant à une partie d'une unité fractionnée en p parties égales.* »

4.3 ***<u>Présentation du tableau du projet global de Solène et ses emprunts aux deux ressources valables sur trois années.</u>***

Tableau des activités : Solène construit ses séances en utilisant parfois une seule activité ou en juxtaposant plusieurs activités. Ainsi la première séance sur les fractions est composée de calcul mental (sur les moitiés et les quarts d'un nombre), de l'activité A et de l'activité B.
Nous n'utilisons pas le mot situation car celui-ci relève pour nous de la didactique, nous utiliserons les mots « partie » ou parfois « activité » dans un sens très large.
Tableau n°3 des activités.

<table>
<tr><th>Activités</th><th>Indications des objectifs associés à la consigne donnée par les ressources.</th><th>Consignes telles qu'elles sont données dans les ouvrages utilisés.</th></tr>
<tr><td>A : les bandes.
ERMEL CM2 p 453 correspond à la phase 1 de l'activité d'ERMEL : « les bandes »</td><td rowspan="2">-Installer ou réinstaller une première signification des fractions simples ($\frac{1}{4}$et $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$et $\frac{3}{8}$) dans un contexte de longueur
-A ce stade la fraction $\frac{n}{p}$ ne représente pas le quotient de n par p, elle a pour signification « n fois $\frac{n}{p}$»,
$\frac{1}{p}$ correspond à une partie d'une unité fractionnée en p parts égales.
Les désignations orales « trois quarts » et « trois huitièmes » sont porteuses de cette signification.
-Connaître et utiliser les relations entre les fractions, les traduire par des écritures additives et multiplicatives.</td><td>Après avoir présenté une bande de 3 cm de large et de 21 cm de longueur.
Consigne telle qu'elle est donnée dans le ERMEL : « Découpez dans cette bande un morceau égal à trois quarts de la longueur de la bande. »</td></tr>
<tr><td>B : les bandes.
ERMEL CM2 P454
Correspond à la phase 2 de l'activité « les bandes ».</td><td>Après avoir reçu une bande de longueur trois quarts de la longueur de la bande u maître (qui fait 36 cm)
Et une bande plus grande que celle du maître (42 cm)
Consigne telle qu'elle est soumise : « Comme vous, j'ai obtenu par pliage et découpage des morceaux de longueur égale à trois quarts de la longueur de cette bande (le maître montre la bande de 36 cm un court instant). J'ai donné à chaque équipe l'un de ces morceaux. En utilisant ce morceau vous devez découper dans la grande bande une bande identique à la bande de départ. »</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>C : Cap Math CM1
P78 et p77 manuel.
Et p150 du guide du maître.</td>
<td>Exprimer des longueurs « non entières » (introduction des fractions)</td>
<td>La tâche consiste à tracer un segment d'une mesure comprise entre deux unités consécutives.
Consigne 1 : « Construis quatre bandes dont les longueurs doivent être comprises entre 2u et 3u. Exprime ces longueurs avec l'unité u, en utilisant des fractions. »
Parfois cette consigne précède la première.
Consigne 2 :
« Construis une bande dont la longueur est comprise entre1uet 2u. Tu dois pouvoir écrire la longueur de cette bande avec l'unité u pour que tes camarades puissent dessiner une bande de même longueur. »</td>
</tr>
<tr>
<td>D : les bandes ERMEL CM2p455</td>
<td>Mêmes objectifs que ceux des parties A et B. D fait partie dans la ressource de la phase 2 de l'activité les « bandes »</td>
<td>Consigne : « On a grisé une fraction de chaque figure. Pour chaque partie grisée donne cette fraction et d'autres écritures comportant au moins une fraction. »
</td>
</tr>
<tr>
<td>E : les bandes ERMEL CM2 p456</td>
<td>Mêmes Objectifs que ceux de la partie A B D. E correspond à la phase 3 de l'activité les Bandes.</td>
<td>Consigne : « On souhaite fabriquer une bande de même longueur que la bande de départ en utilisant ces quatre morceaux. (1/8,2/8, 3/8, ½)
On peut ne pas utiliser tous les morceaux, on peut utiliser plusieurs fois le même morceau. Trouvez au moins quatre façons de procéder. »</td>
</tr>
<tr>
<td>F : les bandes ERMEL : CM2 p458</td>
<td>Mêmes objectifs annoncés que pour les activités A B D E.
F correspond à des activités de la phase 3</td>
<td>Le maître affiche les bandes utilisées dans l'activité E et les désigne par a=1, b=1/2, c=1/4, d=3/8 sans donner leurs mesures.
Consigne 1 : « Si on choisit comme unité de longueur la bande a, la mesure de la longueur de la bande c est ¼ ou2/8. Ecrivez la mesure de la longueur des bandes a, b, d à l'aide d'un nombre entier ou d'une fraction. Si cela est possible trouvez plusieurs fractions. »</td>
</tr>
<tr>
<td>G : Cap math CM1 p79 du manuel.
P154 du guide du maître</td>
<td>Exprimer des longueurs non entières (introduction des fractions), reconnaitre quelques fractions égales.</td>
<td>Consigne :
« Trace les segments dont les longueurs sont données dans ce tableau
<table>
<tr><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td></tr>
<tr><td>2u+1/2u</td><td>1u+3/4u</td><td>3/8u</td><td>5/2u</td><td>1u+5/4u.</td></tr>
</table>
Mesurine dit que la longueur du segment c peut</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>aussi s'écrire 1u+$\frac{3}{2}$u, a-t-elle raison ?
Numérix dit qu'on peut aussi écrire cette longueur $\frac{7}{4}$u.
Calculo affirme que $\frac{20}{8}$u est aussi la longueur du segment C.
Cherche plusieurs autres façons d'exprimer la longueur des segments que tu as tracés dans l'exercice 1. Utilise l'unité u. »</td></tr>
<tr><td>H : Cap Math p86
P170 du guide du maître</td><td>Exprimer une mesure de longueur à l'aide de fractions (en tiers et en sixièmes) et trouver des fractions égales.</td><td>Consigne :
« Trace les segments dont les longueurs sont données dans ce tableau<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>1/3u</td><td>1u+2/3u</td><td>1-1/6u</td><td>6/3u</td><td>2/3u</td></tr></table>Trouve plusieurs autres façons d'exprimer la longueur de chaque segment tracé. Utilise l'unité u. »</td></tr>
<tr><td>I</td><td>Evaluation voir annexe</td><td></td></tr>
<tr><td>J : Graduations ERMEL CM2 p460</td><td>-Comprendre et utiliser le principe de construction d'une graduation régulière en dixièmes et en centièmes.
-Etablir et utiliser les relations entre dixième et unité, entre dixième et centième.
-savoir utiliser des fractions sur une graduation, les décomposer en somme de la partie entière et de fractions décimales.</td><td>Consigne : « vous allez devoir construire une graduation sur la grande bande en utilisant la petite bande. La longueur de cette petite bande est égale à un dixième de l'unité. Le nombre 0 est déjà placé. Placez le nombre 1 sur la bande graduée.
Placez la fraction 8/10.
Placez la fraction 25/10.
Placez la fraction 137/100. »</td></tr>
<tr><td>K : Cap Math</td><td>Placer des fractions décimales sur une droite graduée.</td><td>Consigne : « Placez des fractions décimales sur une droite graduée. »</td></tr>
<tr><td>L : écritures à virgules.
ERMEL CM2 p463</td><td>Prolongement de Graduations.
-Etablir le lien entre fractions décimales et écritures à virgules.
-savoir situer des nombres décimaux sur une graduation, les décomposer en somme de partie entière et de fractions décimales.</td><td>Consigne : « écritures à Virgule »
Consigne : « Placez le nombre 1,7 sur votre graduation. »
La consigne est écrite au tableau et est donnée oralement en utilisant la désignation « un virgule sept »
« Placez 2,03 et 1.235, décomposez les sous la forme d'une somme d'un entier et d'une ou de plusieurs fractions ; écrivez-les en lettres. »</td></tr>
<tr><td>M : ERMEL CM2</td><td>Mêmes objectifs que L.</td><td>Consigne : « complète le tableau. »</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>P 465</td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Ecriture avec les mots unité, dixième, centième, millième</th><th>Ecriture à virgule</th><th>Somme de la partie entière et de fractions décimales</th><th>Fraction décimale</th></tr>
<tr><td></td><td>2,22</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Sept centièmes</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>203 + 8/1 000</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>275/100</td></tr>
<tr><td></td><td>92,120</td><td></td><td></td></tr>
</table>
On procède à une mise en commun après chaque ligne.
La première mise en commun doit faire apparaître que dans certaines cases on peut obtenir plusieurs réponses.

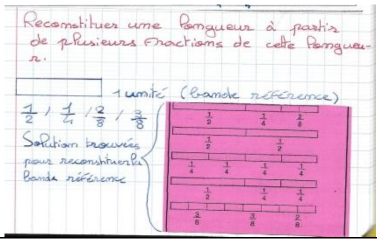
Il s'agit de mettre en correspondance différentes écritures du même nombre.</td></tr>
</table>

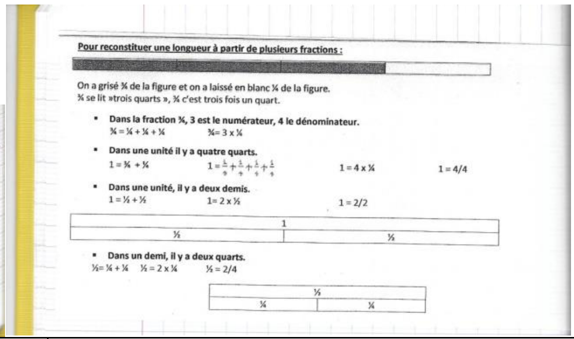
Les textes soumis ci-dessous sont ceux qui apparaissent dans les cahiers des élèves et correspondent à ce qui est à « *apprendre* » à la maison. Les EC sont numérotées, ainsi les EC1 ont été données en premier et en une seule fois, puis Solène propose un deuxième temps d'exposition des connaissances (EC2) puis un troisième (EC3) et un quatrième(EC4).

Tableau n° 4 des EC écrites correspondantes.

<table>
<tr><td>EC1</td><td>Une proposition de définition.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les nombres fractionnaires.
<u>Définition</u> : Un nombre fractionnaire s'écrit avec un nombre au numérateur et un nombre au dénominateur.
<u>3</u> : Le nombre au-dessus de la barre de fraction est le numérateur.
4 : Le nombre en dessous est le dénominateur.
Numérateur, barre de fraction et le dénominateur forment un nombre fractionnaire.</td></tr>
<tr><td>EC1</td><td>Des exemples de lecture de fractions dites usuelles.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les fractions les plus utilisées dans la vie courante sont celles qui représentent:
½ : se lit un demi ou une moitié.
¼ : se lit un quart
1/3 : se lit un tiers
¾ : se lit trois quarts.</td></tr>
<tr><td>EC1</td><td>Des exemples de leur utilisation dans la vie courante.</td></tr>
<tr><td colspan="2">→Tu as déjà dû entendre ces expressions :
« Donne-moi la moitié de ce gâteau », « J'arrive dans une demi-heure », « Ce gâteau est un quatre quart », « Un quart d'heure vient de s'écouler », « Cet animal passe un tiers de son temps à dormir », « Verse un tiers du lait », « Dans trois quarts d'heure le gâteau sera cuit », « Nous avons fait les trois quarts du chemin… ».</td></tr>
<tr><td>EC2</td><td>Les fractions servent pour de nombreux autres calculs.

Un demi, c'est aussi la moitié d'une unité. On écrit : 1=
…………………………………………………………..
Un quart c'est la moitié de la moitié. On écrit : $\frac{1}{2}$ =
…………………………………………………………
1=</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">……………………………………………………………..
Un tiers c'est une unité séparée en trois. On écrit : 1=
…………………………………………………………….
Trois quarts c'est trois fois le quart d'une unité .On écrit : ¾=
……………………………………………………………
1=</td></tr>
<tr><td>EC3 : les bandes
P457 ERMEL</td><td colspan="2">Ces deux EC sont proposées dans la phase 3 de l'activité les bandes



Pour reconstituer une longueur à partir de plusieurs fractions :
On a grisé ¾ de la figure et on a laissé en blanc ¼ de la figure.
¾ se lit »trois quarts », ¾ c'est trois fois un quart.
▪ Dans la fraction ¾, 3 est le numérateur, 4 le dénominateur.
¾ = ¼ + ¼ + ¼ ¾= 3 x ¼
▪ Dans une unité il y a quatre quarts.
1 = ¾ + ¼ 1 = ¼ + ¼ + ¼ + ¼ 1 = 4 x ¼ 1 = 4/4
▪ Dans une unité, il y a deux demis.
1 = ½ + ½ 1= 2 x ½ 1 = 2/2
1
½ ½
▪ Dans un demi, il y a deux quarts.
½= ¼ + ¼ ½ = 2 x ¼ ½ = 2/4
½
¼ ¼</td></tr>
<tr><td>EC4</td><td>Expositions écrites de connaissances sur les décimaux</td><td></td></tr>
</table>

Les tableaux des activités et des EC font partie des annexes. Nous nous appuierons dessus dans les chapitres 5 et 6.

4.4 Remarques sur l'énoncé des consignes et la visibilité des enjeux de savoirs.

Solène exprime très clairement son opinion sur les consignes proposées. Ces consignes, aux yeux de l'enseignante sont donc une contrainte, dans le sens où elles ne sont pas faciles à transmettre. Nous ne pouvions alors faire autrement que de les étudier au regard de leurs effets pendant les temps de classe. En effet, nous pensons que le soin apporté aux passations des consignes prend le pas sur les moments d'exposition des connaissances en termes de préparation.

La réalisation de ce tableau permet de constater que les consignes amènent à des actions sur et avec du matériel « *découper, construire, tracer…* » (activités A, B, C, G, H, J)

Ces consignes conduisent aussi à produire des écritures de fractions équivalentes (activités G, H, F). Remarquons que la lecture de certaines consignes ne renseigne pas toujours sur l'objectif à atteindre. Ainsi la consigne : « *On souhaite fabriquer une bande de même longueur que la bande de départ en utilisant ces quatre morceaux. On peut ne pas utiliser tous les morceaux, on peut utiliser plusieurs fois le même morceau. Trouvez au moins quatre façons de procéder.* » correspond à l'objectif : « *Utiliser des fractions de l'unité. Proposer différentes décompositions additives de l'unité en utilisant des fractions dites usuelles* » annoncé dans l'ouvrage utilisé. L'élève doit répondre à la consigne. L'enseignant doit montrer à ses élèves qu'ils ont, par la même occasion, mis à jour une nouvelle connaissance et les amener à utiliser un langage relevant de la langue naturelle en l'articulant avec un langage mathématique et en s'appuyant parfois sur l'utilisation de signes et symboles. Dans le guide du maître Cap Math CM1 (p155), une note des auteurs dans la marge, explique qu'il s'agit pour les enseignants « *d'inciter les élèves à progressivement n'utiliser le registre de l'action*[56] *que pour vérifier ce qui a été trouvé, en essayant de raisonner dans les deux autres registres (symbolique et verbal)* ». Cette recommandation est précieuse et montre qu'il ne suffit pas de dire ce qu'on a fait mais bien ce que cela a permis d'apprendre. Les deux ressources donnent des conseils généraux. Qu'en est-il alors des recommandations sur le contenu des EC ?

Nous allons pouvoir vérifier si les deux ouvrages outillent les PE pour la prise en charge des deux registres évoqués (symbolique et verbal) lors des phases de mise en commun, de synthèse et d'exposition de connaissances.

5 Analyse des éléments d'institutionnalisations proposés par les ressources utilisées.

[56] *Nous comprenons l'expression « registre de l'action » comme tout ce qui relève de l'action et des verbes dits d'action (tracer, mesurer..)*

5.1 Analyse des expositions de connaissances proposées par les ressources.

Nous avons relevé dans les ressources tout ce qui était étiqueté comme étant une institutionnalisation mais aussi ce que nous avons identifié comme ayant des potentialités d'exposition de connaissances dans les phases de mise en commun ou de synthèse.

Les deux ouvrages proposent des indications relevant d'expositions de connaissances lors des mises en commun, lors des échanges autour des procédures. Nous ne regardons que les pages du guide du maître (pour cap math) et les pages d'ERMEL associées aux séances que présente Solène. En aucun cas, nous ne pouvons être à même d'évaluer le projet global de ces deux ressources. En fonction des choix effectués par l'enseignante, nous pourrons dire ce qu'elle retient ou non des ressources.

Ce relevé d'indications des possibles EC va nous permettre de tirer des conclusions par rapport aux proximités de ce qui est prescrit par l'ouvrage pour les séances choisies et ce qui est réalisé par le PE.

La première séance réalisée par Solène correspond à la première situation du ERMEL CM2 et à la première phase de son développement.

5.2 Les indications pour les phases comportant des expositions de connaissances proposées par les deux ressources.

La première séance n'est pas une séance dédiée à l'institutionnalisation, c'est une activité de découverte à la fois du matériel (la bande) et des fractions. Elle est considérée par Solène comme la première rencontre des élèves avec les fractions. En revanche, pour ERMEL cette séance n'est pas une première « rencontre ». Cette partie (A dans notre tableau) est proposée en CM1 (excepté l'année où elle avait été reportée aux CM2 compte tenu des difficultés des élèves). Cette première séance dans la programmation du ERMEL CM2 fait suite à celles proposées dans le ERMEL CM1.

Dans les extraits suivants, nous recopions ce qui est écrit dans les ouvrages.

Extrait n°1 du ERMEL

Partie A	*ERMEL CM2 p 453.*	*Indications ou institutionnalisations proposées par les ouvrages utilisés.*
Cette mise en commun permet : -de préciser le sens des expressions un quart et trois quarts. -d'introduire et d'utiliser les écritures $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ en écrivant ces fractions sur les morceaux correspondants. - de préciser que dans la fraction ¾ le 3 est le numérateur et le 4 le dénominateur que le 4 indique qu'il faut partager en quatre et le 3 indique qu'il faut prendre trois parts.		

Ces indications générales d'exposition de connaissances se situent dans le cadre de la découverte de fraction inférieure à 1.

L'ouvrage n'explique pas ce que les auteurs entendent par « *préciser le sens des expressions un quart et trois quarts* ». Nous ne comprenons pas ce qui est attendu ici. Les mots « *morceaux et parts* » sont utilisés sans préciser que ces derniers doivent être égaux. Le mot « *part* » peut renvoyer à la proportionnalité ou à la division, mais le mot « *morceau* » renvoie

au matériel sans aucune autre précision. Le texte indique qu'il faut partager en 4 (si 4 est le dénominateur) sans préciser la nature de l'unité (un gâteau, un trajet de 200 km).
L'injonction : le « *4 indique qu'il faut partager en quatre et le 3 indique qu'il faut prendre 3 parts* » : comporte des implicites. En CM, les élèves savent ce que sont les partages équitables, donc implicitement les parts vont sans doute être considérées comme identiques. Cette injonction tente de proposer une technique qui renvoie implicitement à l'utilisation du matériel puisqu'il est possible de « *prendre des parts* ». ERMEL - dans cet extrait- ne donne pas de définition générique de ce qu'est une fraction ni du numérateur ni du dénominateur.
Les énoncés produits par la ressource évoquent l'action réalisée ou rappellent l'utilisation du matériel : « *écrire sur les morceaux* ». En revanche il y a peu d'indications sur ce qui peut être dit en classe pour dépasser ce registre. Il est alors difficile d'anticiper sur ce que le professeur va proposer comme exposition de connaissances à l'oral. Ce sera l'objet d'une autre partie de ce chapitre.
Extrait n°2 du ERMEL

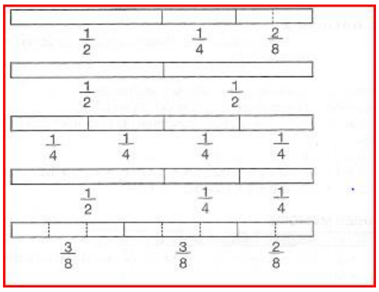
B	*ERMEL CM2 p*	*Indications ou institutionnalisations proposées par les ouvrages utilisés.*
L'explicitation des procédures et des arguments doit permettre : -de dégager les relations : dans une unité il y a deux demis, dans une unité il y a quatre quarts, dans un demi il y a deux quarts. D'écrire et de lire les égalités traduisant les procédures et les relations utilisées $1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $1=\frac{4}{4}$ $1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ p.456 : la mise en commun doit permettre de rejeter les erreurs en revenant à la signification du numérateur et du dénominateur et de noter certaines égalités $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$		

D'après ERMEL, les échanges autour des procédures devront permettre à l'enseignant d'établir un « *corpus d'égalités* », une « *traduction* » entre les actions réalisées et l'expression de la mesure des bandes. Plusieurs égalités apparaissent : celles qui proposent des sommes de fractions au même dénominateur leur somme valant 1. Puis, d'autres qui proposent des sommes de fractions dont les sommes valent $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$. L'une de ces sommes se distingue car la somme des fractions au même dénominateur donne une fraction dont le dénominateur est différent ($\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$). Enfin les premières équivalences d'écritures apparaissent $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

L'ouvrage ne propose pas de discours ni d'éléments de gestion, nous ne pouvons que faire des déductions comme il est recommandé d'écrire des égalités au tableau, de dégager des relations en disant « *deux moitiés d'une même unité font une unité* ». Il semble qu'il ne soit pas encore utile de produire une exposition écrite des connaissances puisque la ressource n'en propose pas ni n'indique d'en réaliser une.
ERMEL explique que la mise en commun permet de rejeter les erreurs, de quelles erreurs parle-t-il ? Comment va-t-on les rejeter ? Est-ce l'usage du matériel qui permettra de différencier le vrai du faux ?
Si un élève trouve que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ vaut $\frac{2}{8}$, quelles seront les stratégies du professeur pour montrer que le résultat est faux ? Va-t-il le prouver par le calcul par les pliages de bandes ? Aura-t-il plutôt recours au collectif de la classe ? Si oui, comment gèrera-t-il les interactions entre élèves ?
Autant de réponses qui sont à la charge des enseignants. Notons également que les égalités proposées conduisent surtout à mettre en évidence des fractions équivalentes dans le sens où le couple (2 ; 8) est la même fraction que (1 ; 4).
Extrait n°3 du ERMEL

EC2 : ERMEL CM2p455

Mise en commun :
Les différentes propositions sont présentées en effectuant les reports correspondants sur les bandes de même longueur que la bande témoin. En matérialisant ces reports à l'aide d'un feutre on obtient une représentation des solutions trouvées comme ci-dessous.

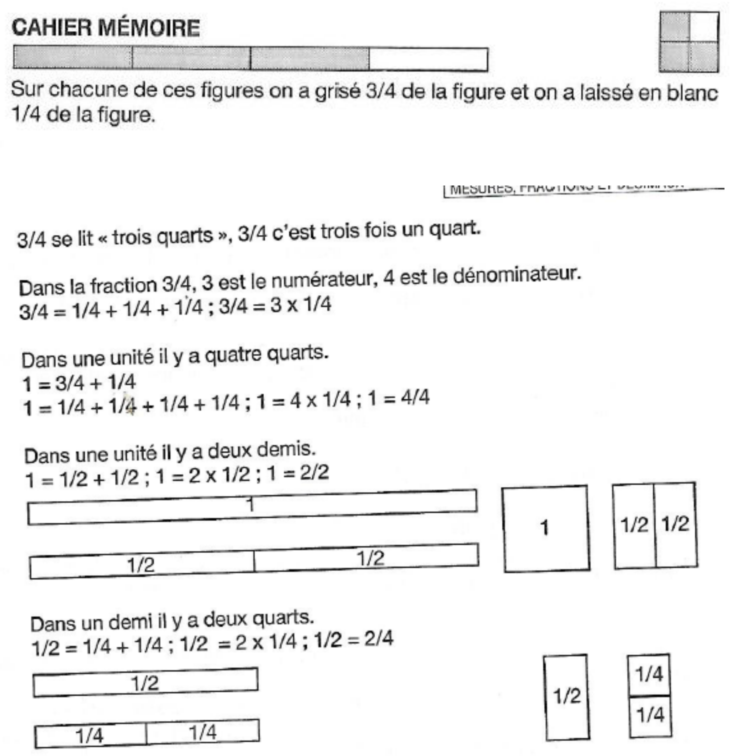


Par cette mise en commun, l'enseignant montre la confiance qu'il a en ses élèves et en leurs capacités à faire émerger plusieurs expressions de l'unité. La ressource semble indiquer qu'il est possible de produire des sommes de fractions inférieures à 1 avec des dénominateurs parfois différents.
Cet extrait donne quelques éléments liés à la gestion « *utilisation d'un feutre* » et utilisation de « *bandes de même longueur que la bande témoin* ». Le mot unité ou la référence au nombre 1 ne sont pas utilisés. Les mots utilisés pour évoquer la bande unité sont « *bande témoin* » (p457) ou encore « *la bande du maître* » (p454). Les bandes manipulées sont toutes de même longueur mais c'est implicite ou en acte (comparaison de leur longueur : **on voit** qu'elles sont identiques.)
L'encart rouge expose 5 bandes unités subdivisées différemment pour favoriser la représentation des fractions équivalentes.
Les barres verticales délimitent la longueur des différentes sous unités. La mesure des longueurs des bandes est écrite en dessous des bandes. Ainsi on peut en déduire que deux

bandes de longueurs $\frac{1}{4}$ u feront $\frac{1}{2}$u ou encore que $\frac{4}{8}$u représentent la même mesure que $\frac{1}{2}$u. Cette représentation est un « *entre deux* » avant d'installer la droite graduée. Les nombres se placeront au-dessus ou au-dessous des graduations.

Extrait n°4 du ERMEL

EC3 ERMEL CM2p458 qui fait suite à l'activité D



CAHIER MÉMOIRE

Sur chacune de ces figures on a grisé 3/4 de la figure et on a laissé en blanc 1/4 de la figure.

3/4 se lit « trois quarts », 3/4 c'est trois fois un quart.

Dans la fraction 3/4, 3 est le numérateur, 4 est le dénominateur.
3/4 = 1/4 + 1/4 + 1/4 ; 3/4 = 3 x 1/4

Dans une unité il y a quatre quarts.
1 = 3/4 + 1/4
1 = 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 ; 1 = 4 x 1/4 ; 1 = 4/4

Dans une unité il y a deux demis.
1 = 1/2 + 1/2 ; 1 = 2 x 1/2 ; 1 = 2/2

Dans un demi il y a deux quarts.
1/2 = 1/4 + 1/4 ; 1/2 = 2 x 1/4 ; 1/2 = 2/4

Cette leçon établit des égalités entre fractions et entre fractions et unités. La justification de ces égalités provient des actions réalisées sur les bandes et représentées sous forme de rectangle allongé. Le texte accompagnant ces ostensifs est laissé à la charge des élèves (et du maître) ayant vécu (ou fait vivre) la situation. Il n'y est pas explicité que 1[57] c'est aussi quatre quarts (mais il a été conseillé de voir cette égalité lors des mises en commun des situations). Cette séance d'ERMEL explicite très clairement d'écrire « *dans un cahier mémoire* ». Ce qui suppose que ce cahier existe comme un support pour les élèves à mémoriser l'essentiel. L'essentiel ici étant cette liste d'exemples.

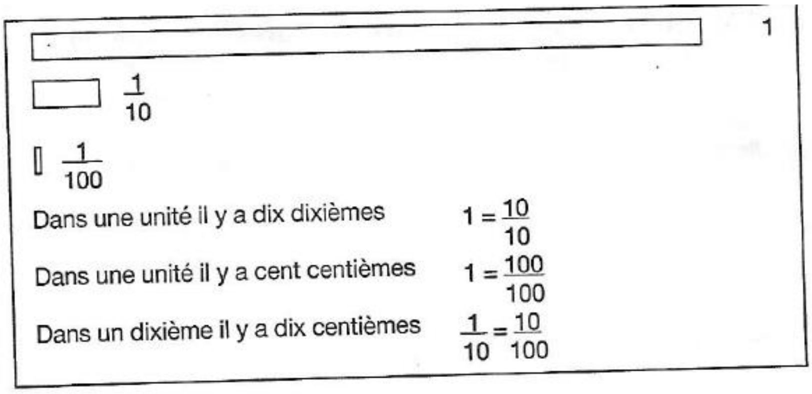
Il est aussi à la charge des élèves de généraliser et de comprendre ce qu'est une unité. Sur les deux figures représentées c'est à la charge des élèves d'identifier l'unité : un rectangle dans les deux cas mais dans des formes différentes. (Plus ou moins allongé et dans le sens horizontal ou vertical)

Le discours associé à cette leçon n'est pas proposé par l'ouvrage et reste à la charge du professeur.

[57] Remarquons que l'ouvrage ERMEL CM1 propose une séance appelée « bande unité » mais elle n'est pas retenue par Solène

Alors que la situation permet d'additionner des fractions avec des dénominateurs différents, cela n'est absolument pas repris dans la trace écrite. L'objectif de cette trace étant seulement de montrer l'équivalence des écritures des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, et $\frac{2}{8}$ et $\frac{1}{4}$.

Extrait n°5 du ERMEL

ERMEL CM2 p460


CAHIER MÉMOIRE

Dans une unité il y a dix dixièmes. 10 x 1/10 = 1 10/10 = 1

Dans une unité il y a cent centièmes. 100 x 1/100 = 1
100/100 = 1

Dans un dixième il y a dix centièmes. 1/10 = 10/100

Dans cet extrait l'ouvrage distingue <u>deux supports d'expositions de connaissances</u> : <u>l'affichage</u> et le recours <u>au cahier mémoire</u>. Il n'y a pas d'explications proposées par ERMEL pour indiquer pourquoi ce qui est écrit sur l'affiche est pertinent pour un affichage permanent collectif. Il ne précise pas non plus pourquoi ce qui doit être écrit dans le cahier mémoire ne comporte plus de schémas mais seulement des égalités. Nous supposons que l'ouvrage parie que dans la culture des professeurs des écoles, les enseignants savent qu'un affichage est perçu comme une aide et que ce qui est écrit dans le cahier mémoire doit être appris à la maison et su sans hésitation. Dans cet exemple, l'affiche prend en charge les représentations « *graphiques* » et le cahier mémoire les égalités à connaitre.

<u>Le texte du cahier</u> reprend ces égalités en introduisant 10x1/10[58]=1 sans indiquer les mots à utiliser pour lire cette égalité. Faut-il lire 10 fois un dixième ou 10 fois 1 sur 10 ?

L'étude des extraits du ERMEL permet de dire que l'ouvrage conseille l'écriture de certaines expositions de connaissances dans un cahier dit « *cahier mémoire* ». Ces extraits évoquent aussi ce qui peut être dit à l'oral lors des mises en commun et la possibilité d'exposer des connaissances par voie d'affichage.

Les auteurs des ouvrages proposent de grandes lignes parfois assez floues pour orienter les mises en commun ou bien les moments d'expositions de connaissances. D'autres fois des textes sont soumis mais leur degré de décontextualisation est faible et relève du degré 3. Le

[58] *Nous avons conservé les notations du cahier (barre oblique de la fraction).*

discours associé aux différents exemples est à la charge du maître. Le maître a à sa charge de trouver les mots à dire lors des explications à chaud (c'est-à-dire en classe), de comprendre le choix de l'ouvrage quant à ses indications et la présence d'expositions de connaissances.
Dans le chapitre 2, nous avions mis en évidence l'importance de travailler sur le repérage de l'unité. Ce travail est proposé dans un contexte de longueur ou d'aire mais l'évocation de l'unité est souvent implicite ou en acte.

5.3 Les indications d'institutionnalisation proposées par Cap Math.

Le guide du maître détaille d'une part le déroulement et compare d'autre part, dans la marge, des conseils qui précisent et justifient parfois certains choix dans les déroulements.
Ce sont les indications dans la marge que nous recopions.
Extrait n°6 du ERMEL

E Cap math p 79 CM1 manuel de l'élève(2008) Guide du maître p154-155
Le travail comporte un double aspect : -mesure de segments et construction de segments de longueur donnée - recherche d'expressions exprimant la même longueur. Sur ce dernier point deux types d'arguments peuvent être donnés pour justifier que deux expressions correspondent à la même longueur : -vérification expérimentale ; -justification « *théorique* » basée sur la référence à des actions : Les auteurs de l'ouvrage proposent de formuler ainsi les explications « *3/2u c'est comme 1u+1/2u parce que trois demis, c'est deux demis et un demi et deux demis c'est un* ». La verbalisation de ces raisonnements (avec les mots demis, quarts…) et la référence à la manipulation effective des parts d'unités constituent une aide à l'abstraction. Il s'agit de mettre en relation (en résonance) trois registres : le registre symbolique (fractions écrites), le registre de l'action[59] (partage et report de l'unité) et le registre verbal (demi, quart). Pour que cette mise en relation fonctionne, il faut inciter les élèves à progressivement n'utiliser le registre de l'action que pour vérifier ce qui a été trouvé en essayant de raisonner dans les deux autres registres. C'est ce qui est fait pour l'exercice 3 : « *pour le segment d ;* $\frac{5}{4}$ *u ça ne va pas, parce que quatre quarts, c'est 1 et qu'alors il ne reste qu'un quart alors qu'il en faut trois* ». La verbalisation des actions réelles ou évoquées, dans le langage des fractions, constitue une aide importante à leur représentation mentale. À la fin de la synthèse les égalités sont affichées au tableau sous la forme $1=\frac{2}{2}=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}$ $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$ Elles peuvent être illustrées à l'aide de bande unité. On les retrouve dans le dico maths. **Synthèse** : Plusieurs points peuvent être mis en évidence : -pour une même mesure, il existe plusieurs façons de l'exprimer avec des fractions. -pour savoir que des expressions évoquent bien la même mesure on peut vérifier avec la bande

[59] *Ce qui relève de l'action sur et avec du matériel.*

unité ; mais on peut aussi faire un raisonnement dans sa tête ; -au cours des raisonnements, on utilise en particulier le fait que : un, c'est deux demis ou quatre quarts ou huit huitièmes ; un demi, c'est comme deux quarts ou quatre huitièmes.

Précisons que Solène continue d'utiliser l'ancienne version du guide du maître car la version plus récente (2012) ne lui convient pas (plus condensée). L'extrait que nous avons recopié propose à la fois des verbalisations possibles « $\frac{3}{2}$*u c'est comme 1u+*$\frac{1}{2}$*u parce que trois demis, c'est deux demis et un demi et deux demis c'est un* ». Mais aussi des justifications pour accompagner le maître dans sa progression « *La verbalisation de ces raisonnements (avec les mots demis, quarts…) et la référence à la manipulation effective des parts d'unités constituent une aide à l'abstraction. Il s'agit de mettre en relation (en résonance) trois registres : le registre symbolique (fractions écrites), le registre de l'action (partage et report de l'unité) et le registre verbal (demi, quart).* ».
La partie intitulée « *synthèse* » donne des éléments du contenu utilisable dans un discours « *pour une même mesure, il existe plusieurs façons de l'exprimer avec des fractions.* » mais aussi une mise en perspective des procédures « *pour savoir si des expressions évoquent bien la même mesure on peut vérifier avec la bande unité ; mais on peut aussi faire un raisonnement dans sa tête* ». Pour finir la partie synthèse donne aussi des points d'appuis à utiliser pour développer les raisonnements « *au cours des raisonnements, on utilise en particulier le fait que : un, c'est deux demis ou quatre quarts ou huit huitièmes ; un demi, c'est comme deux quarts ou quatre huitièmes* »
Les expositions orales de connaissances sont en partie prises en charge par le manuel, les expositions écrites sont prises en charge par le dico maths. La question est de savoir ce que l'enseignante va transposer ou non.
Remarquons aussi que le guide du maître et le manuel désignent explicitement l'unité de référence en la notant « *u* ». Cette unité disparait dans un souci de généralisation qui n'est pas explicité dans les extraits du guide du maître choisis par Solène, le lecteur constate juste que la lettre « *u* » parfois disparait.
Extrait n°6 du ERMEL

<table>
<tr><th>H
p 86 CM1 manuel de l'élève (2008)</th><th>Relevés des recommandations du guide du maître p171</th></tr>
<tr><td colspan="2">Dans cette séance, les élèves sont amenés à utiliser d'autres fractions de dénominateurs 3 ou 6, nécessitant un nouveau partage de l'unité moins naturel que le partage en 2,4, 8.
L'enseignant aide les élèves à distinguer les erreurs qui proviennent d'une mauvaise interprétation des fractions de celles qui proviennent d'une difficulté à partager en 3 et en 6.
Un temps suffisant est pris pour expliciter les stratégies de partage en 6 à partir du partage en 3 et comparer aux partages en 4 et en 8 à partir du partage en 2.
Les nouveaux mots utilisés sont explicités et comparés à d'autres déjà utilisés pour les fractions (tiers en relation avec trois, quart avec quatre, sixième avec six…) : recours au dico math.
Exemples de raisonnements :
$\frac{6}{3}$=2 « parce que trois tiers c'est 1 »
$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ « parce qu'avec 2 sixièmes, on fait 1 tiers avec 4 sixièmes on fait deux tiers et avec 8 sixièmes on fait donc 4 tiers » ;</td></tr>
</table>

$1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ « *parce que 1 c'est trois tiers, ajoutés à deux tiers, ça fait cinq tiers* ».
Fractions égales :
La recherche peut être conduite par équipes de deux. Lors de la mise en commun, les deux catégories de procédés utilisées par les élèves pour trouver des fractions égales aux fractions données sont mises en évidence :
-recours aux segments tracés et à la bande unité, en essayant d'autres pliages de l'unité.
-utilisation de raisonnements appuyés sur une image mentale des actions associées à chaque fraction.
Les résultats peuvent être traduits sous forme d'égalités entre fraction.

Cette séance est placée dans le manuel après la séance E, les auteurs du manuel donnent moins d'indications sur ce qu'il y a à verbaliser par rapport aux indications de la séance E. Aucune référence n'est faite aux trois registres évoqués précédemment. Les procédures mises en avant sont les mêmes que dans la séance précédente mais formulées différemment « *recours aux segments tracés et à la bande unité, en essayant d'autres pliages de l'unité* » : utilisation de raisonnements appuyés sur une image mentale des actions associées à chaque fraction ; Les résultats peuvent être traduits sous forme d'égalités entre fraction qui correspondent à la « *vérification expérimentale* » et à la « *justification théorique* » évoquées précédemment. Les auteurs estiment sûrement que les enseignants suivent le manuel et dans ces perspectives ne répètent pas nécessairement ce qui est expliqué d'une séance à une autre. De plus les différents conseils ne sont pas hiérarchisés parfois ils sont du côté de la gestion de classe et des déroulements « *la recherche peut être conduite par équipes de deux* », d'autres fois ils portent sur des procédures possibles, des indications de formulations à destination des enseignants. Notons que des indications assez vagues sont données : « *L'enseignant aide les élèves à distinguer les erreurs qui proviennent d'une mauvaise interprétation des fractions de celles qui proviennent d'une difficulté à partager en 3 et en 6.* » sans dire comment l'enseignant peut les distinguer.
Pour cette séance, les expositions de connaissances orales sont prises en charge mais dans une moindre mesure que dans la séance précédente. Les expositions écrites sont toujours prises en charge par le Dico math.

5.4 ***Remarques au sujet du fascicule Dico Math.***

Ce fascicule d'une trentaine de pages accompagne le manuel Cap Maths. Il compile ce qui correspond aux expositions de connaissances du manuel. Ce fascicule n'est pas utilisé par Solène ni pour la construction de ses traces écrites ni en classe lors de phases de structuration du savoir. Nous avons compris qu'utiliser cette ressource supplémentaire lui paraissait compliqué en termes de gestion de classe. L'âge des élèves et leur relative autonomie obligent l'enseignante à accompagner les manipulations diverses qu'engendre l'introduction d'une nouvelle ressource. Des raisons liées à la gestion de classe sont avancées (faire de la place sur les tables, distribuer le matériel…) mais aussi des explications plus en rapport avec le contenu (faire les liens entre ce qui est écrit et ce qu'en comprennent les élèves…)

5.5 Synthèse

La reconstitution de l'itinéraire cognitif de Solène et l'étude des expositions de connaissances prescrites par les deux ressources, nous permettent de dégager les points suivants :

Du côté des ressources :

Une ressource, ERMEL, est plus utilisée qu'une autre. L'apprentissage des fractions dans ces ressources est essentiellement développé dans un contexte de mesure. Le recours à la manipulation de bandes est présent dans les deux ressources. Pour Solène les articulations entre les deux ouvrages semblent être possibles car les deux ressources utilisent le même matériel. La prise en charge des EC est faite différemment dans les deux méthodes. La collection Cap Math propose un recueil pour les EC écrites. Dans le guide du maître il y a parfois des aides pour dire ce qu'il y a à exposer.
Dans la ressource ERMEL, la prise en charge des EC laisse encore plus de marge de manœuvre aux PE. La ressource conseille toutefois, la présence et l'utilisation d'affiche et d'un cahier-mémoire. Des indications précises sur un contenu à transmettre lors des moments des EC ne sont pas formulées.

Du côté de Solène

Le projet global de Solène présente un nombre de séances consacré aux fractions et fractions décimales qui semblent être à mi-chemin des propositions des deux ressources. Nous avons pu constater une proximité forte entre ce que prévoit Solène et les ressources au sujet des consignes et du matériel.
Enfin, l'utilisation du dico math est écartée pour des raisons matérielles. Nous supposons aussi que l'ouvrage de référence étant ERMEL, l'utilisation du fascicule paraît superflue.
Globalement, Solène reconstruit un itinéraire cognitif construit à partir de deux ressources. Cet itinéraire essaie de prendre en compte certaines des caractéristiques des deux ouvrages et en écarte d'autres. Des choix qui se justifient, quant à l'itinéraire cognitif, par la prise en compte de plusieurs contraintes que s'impose l'enseignante. D'une part, Solène privilégie des « *activités* » qui laissent une place à la manipulation d'un matériel. D'autre part, Solène choisit des ressources conseillées dont les programmations lui semblent ambitieuses et la contraignent alors à en modifier les parcours.

6 Etude des pratiques de Solène

6.1 Particularité de la composante sociale de Solène.

Solène exerce dans une école rurale depuis 2009. Selon les effectifs elle a en charge des CM1 ou des CM2 ou bien encore un cours double CM1-CM2. En **2008-2009**, Solène enseignait en CM1. Nous avions commencé à observer cette classe dans le cadre de la réalisation de notre mémoire de master 2 (Allard 2010). Nous avions relevé ses cahiers d'exercices et de leçons en mathématiques. Aucun texte n'avait été écrit sur les fractions, deux exercices ont été faits sur les cahiers d'exercices qui consistaient à tracer des segments à partir d'une bande

unité et de fractions d'unité de cette bande. Solène a exprimé ses difficultés à enseigner certains domaines des mathématiques à sa collègue de CM1-CM2. L'année scolaire suivante est alors organisée différemment. Les élèves sont répartis en deux cours doubles, CM1-CM2 de 23 et 25 élèves.
Les trois premières années, Solène travaille de manière assez étroite avec une de ses collègues maître formatrice. Leurs préparations sont communes, leurs programmations et progressions également, elles utilisent les mêmes supports pédagogiques. Les programmations ne sont pas pensées annuellement mais sur deux ans.

6.2 ***Un itinéraire cognitif marqué par une souplesse du fonctionnement de l'école.***

Pour faciliter leur gestion de classe au regard de certains points du programme, les enseignantes se répartissent, dans la journée les classes en cours simple (un seul niveau). C'est le cas pour l'introduction des fractions. Pour autant, lors de phases de réinvestissement, les classes redeviennent doubles et les élèves s'exercent auprès de leur enseignante attitrée. Ainsi, les enseignantes ont un regard sur les acquisitions de leurs élèves. Leur séquence sur l'enseignement « *des fractions aux nombres décimaux* » est la même. En CM1 les fractions décimales ne sont pas étudiées, elles le seront en début d'année du CM2. Les deux enseignantes ne suivent pas les recommandations des programmations proposées par les instructions officielles (B0 2008,2012), elles en respectent le programme mais pas le découpage compte tenu des choix de gestion réalisés.

En **2009-2010** Solène prendra en charge l'enseignement des fractions pour tous les CM1 de l'école sans aborder les fractions décimales tandis que sa collègue prend en charge tous les CM2 et le programme sur les fractions décimales et nombres décimaux.
En **2010-2011**, Solène et sa collègue décident de ne pas introduire les fractions en CM1, le groupe ayant des connaissances très fragiles en numération. Danièle reprend tout le programme de numération de CE2 puis de CM1 pour les CM1.
En **2011-2012** Solène a introduit l'enseignement des fractions au groupe de CM2 qui n'a pas étudié les fractions en CM1. Danièle prendra en charge la suite du programme sur les fractions décimales pour les CM2. En fin d'année, Danièle introduira les fractions pour les CM1. Danièle se charge de l'enseignement des fractions en CM2, Solène suit ce que fait sa collègue pour reprendre la main l'année suivante.
En **2012-2013** Danièle a quitté l'école, Solène a en charge le groupe de CM2 (il n'y a plus de cours double), les fractions avaient été introduites en CM1 par Danièle. Aucune collaboration ne sera faite avec la nouvelle collègue de CM1.
En **2013-2014**, Solène a en charge une classe à simple niveau en CM1, elle introduit les fractions puis les fractions décimales sans aborder les nombres décimaux. Elle suivra ce groupe en CM2 pour la rentrée de 2014-2015. Solène garde la programmation prévue avec Danièle, elle suit ses élèves deux ans ce qui permet de mettre en œuvre leur programmation.

Tableau n°5 de la répartition des classes sur 6 années scolaires.

Année scolaire	Solène	Danièle
2008-2009	CM1	CM1-CM2
2009-2010	CM1 –CM2	CM1 –CM2
2010-2011	CM1 –CM2	CM1 –CM2
2011-2012	CM1 –CM2	CM1 –CM2
2012-2013	CM2 :	N'exerce plus dans l'école.
2013-2014	CM1	N'exerce plus dans l'école.

Les différentes reprises de trames dans le tableau indiquent qu'il s'agit de la même classe (mêmes élèves)

Tableau n°6 de la répartition de l'enseignement des fractions.

Année scolaire	Solène	Danièle
2009-2010	CM1 : enseignement des fractions sans aborder les fractions décimales.	CM2 : fractions, fractions décimales et nombres décimaux. CM1 : les fractions décimales.
2010-2011	CM1: pas d'enseignement des fractions.	CM2 : fractions, fractions décimales et nombre décimaux.
2011-2012	CM2 : enseignement des fractions, fractions décimales et nombres décimaux.	CM1 : enseignement des fractions sans aborder les fractions décimales.
2012-2013	CM2 : reprises des fractions jusqu'aux fractions décimales (ce groupe a vu les fractions en CM1 avec Danièle)	N'exerce plus dans l'école.
2013-2014	CM1 : enseignement des fractions sans aborder les fractions décimales	N'exerce plus dans l'école.
2014-2015	CM2 : Solène reprend la classe de l'année passée.	

6.3 Reconstitution des sommaires de Solène.

Solène est l'enseignante que nous avons suivie sur un temps long. Nos premiers recueils de données datent de 2009. Afin de montrer l'évolution de sa pratique par rapport aux expositions de connaissances écrites sur ce temps, nous avons choisi d'étudier les sommaires de ses recueils de leçons pour les années 2008-2009 /2011-2012 /2012-2013 /2013-2014. En 2009/2010, il n'y a pas de traces écrites sur les fractions, et en 2010/2011, ce n'est pas Solène qui est en charge de cet enseignement.
Solène a bénéficié d'une décharge d'enseignement (1 journée par semaine), c'est pourquoi à partir de 2011, elle ne prend plus en charge l'enseignement de la géométrie.
Sommaire 2008-2009

Chacune des expositions de connaissances est identifiable par un titre souvent écrit en rouge. Cette année-là Solène ne collabore pas encore avec sa collègue de CM1-CM2. Les expositions de connaissances écrites (appelées traces écrites dans le premier degré) sont rangées dans un classeur et classées en 5 domaines : nombres, géométrie, mesures, gestion de données et techniques opératoires. Nous reconstituons le sommaire en distinguant les différents domaines.

Sommaire (1) reconstitué année 2008-2009

NOMBRES (4)
1. La valeur des chiffres 2. Décomposition des nombres entiers à l'aide des nombres 10,100, 1 000 3. Pour comparer et ranger des nombres entiers 4. Numération : rappels importants (écriture des nombres et règles d'orthographe qui y sont liées)
GEOMETRIE (4)
5. À quoi sert l'équerre ? 6. Les droites perpendiculaires 7. Le cercle 8. Pour tracer des droites parallèles
MESURE (4+1)
9. Mesure de longueurs (tableau de mesure) 10. Les aires comparaisons 11. Les aires : mesure 12. Les unités de longueurs 13. Conversions des unités de longueur : méthode (leçon écrite par une enseignante remplaçante)
TECHNIQUES OPERATOIRES (1)
14. Les feuilles de partage : vers la division

Les intercalaires du classeur annonçaient un domaine « *gestion de données* » qui ne fait l'objet d'aucun écrit. Un autre domaine est très peu investi : celui des techniques opératoires.

Il y a assurément un décalage entre le prévu et ce qui a été réellement effectué. Nos échanges nous donnent des éclairages sur les choix de cette enseignante. En ce qui concerne les techniques opératoires, elle dit « *c'est à force d'en faire qu'on acquiert la technique. De plus en CE2, les élèves ont été particulièrement bien entrainés* ». Elle ajoute « *qu'ils maitrisent suffisamment pour gagner du temps là-dessus* ». Au sujet des fractions, elle nous explique que pour elle « *c'est plutôt du ressort du CM2* ». Solène fait des choix en fonction des particularités de l'école : tels que celui de ne pas faire d'EC sur les techniques opératoires parce que sa collègue de CE2 fait faire beaucoup d'opérations et celui de renvoyer l'étude des fractions au CM2 parce que la collègue semble plus à l'aise avec l'enseignement de cette notion.

Sommaire du recueil de leçons 2010-2011-2012.

Le recueil n'est plus sous le format d'un classeur, dorénavant c'est un cahier de 96 pages de format 21x29,7. Ce cahier suit les élèves deux ans, des leçons sont écrites par Solène et d'autre part Danièle.
Les leçons ne sont plus classées selon des domaines identifiés par les enseignantes. Les leçons sont recopiées ou collées les unes derrière les autres, elles ne sont pas numérotées.
La reconstitution du sommaire est donc réalisée en suivant l'ordre chronologique de l'écriture des leçons sur deux années. 2012 correspond à la troisième année où les deux collègues vont travailler ensemble.

Sommaire(2) des recueils de leçons 2010-2011-2012

Les leçons du CM1 (2010-2011)
1. La numération : valeur d'un chiffre 2. Les nombres entiers 3. Résoudre un problème numérique : un peu de méthode 4. Unité 1 : ce que j'ai appris 5. Le jeu des trombones : comment sont construits les nombres ? 6. Les unités de numération 7. Calcul réfléchi : la règle des zéros 8. Comparaison d'aire 9. Vocabulaire : perpendiculaire, rayon d'un cercle 10. Ce que j'ai appris 11. Partager 12. Les multiples 13. Les bandes colorées : vers la proportionnalité
Les leçons du CM2 (2011-2012)
14. Comment ranger des aires ? 15. Les droites 16. Les nombres fractionnaires 17. Reconstituer une longueur à partir de plusieurs fractions de cette longueur 18. Agrandissement d'une figure 19. Utiliser une graduation en dixièmes et centièmes 20. Des égalités de fractions 21. Le calcul posé des décimaux 22. Tracer une droite parallèle à une autre en passant pas un point 23. L'aire du rectangle 24. Mesure : les longueurs 25. Les unités de mesure (longueur, masse, contenance) 26. L'aire du triangle 27. Symétrique d'une figure (2) 28. Pourcentages

Les leçons 1, 2, 4, 5, 6, 7 consacrées à la numération ont été écrites en CM1. Très peu de leçons sont consacrées à la géométrie, les deux leçons qui traitent de la proportionnalité (13,28) ont été écrites par Danièle. Pour la plupart des textes, Danièle soumettait ses textes à Solène et les deux collègues essayaient de produire une leçon qui les satisfaisait toutes les deux. C'est sûrement une des raisons pour lesquelles les titres sont aussi variés. Parfois ils

annoncent explicitement un contenu : l'aire du triangle (23), d'autres fois des types de tâches : Partager (11), reconstituer une longueur à partir de plusieurs fractions de cette longueur(17). De plus, d'autres titres renvoient explicitement à des énoncés de méthode : résoudre un problème numérique : un peu de méthode (3). Enfin certains titres sont des questions et renvoient plus ou moins explicitement aux questions du groupe : comment ranger des aires ?(14) ; le jeu des trombones : comment sont construits les nombres ? (5).
Deux titres ne nous permettent pas d'identifier un contenu en jeu : « *ce que j'ai appris* » (4,10). Ces deux traces écrites provoquées par Danièle avaient pour objectif de revoir à la fin d'une période tout ce qui avait été enseigné. Par ailleurs, le manuel Cap Math propose des séances de révisions intitulées « *ce que j'ai appris* ». Ces séances ont pour but de remobiliser les connaissances des élèves avant les évaluations. Solène ne pense pas que ce type de séances ait une utilité, c'est pourquoi en CM2, l'expérience ne sera pas poursuivie.
Ces deux années scolaires sont marquées par un « *tâtonnement* » des pratiques. D'une part les deux collègues essaient de trouver et de stabiliser leurs pratiques (trouver des titres, proposer un recueil de leçons uniformisé) et d'autre part elles essaient des types de séances qu'elles conserveront dans certains cas et écarteront dans d'autres cas. Parfois, elles ne savent pas ce qui s'est passé réellement dans un niveau puisqu'elles n'en ont pas la charge.
C'est pourquoi laisser des traces écrites est important dans le sens où cela soutient la mémoire didactique de la classe puisque les professeurs ne la détiennent pas nécessairement.
Le fonctionnement particulier de cette classe, rappelle dans une certaine mesure l'expérience menée par Brousseau et Centeno pour illustrer ce qu'était la mémoire didactique. Dans notre exemple, les enseignantes savent ce qui a été fait dans les différents niveaux sans pour autant avoir vécu les séances. Elles ne peuvent fonctionner sans mémoire et essaient d'en créer une par le biais des expositions écrites de connaissance.

Sommaire (3) du recueil de leçons 2012-2013

Danièle est partie de l'école pour exercer en tant que conseillère pédagogique. Solène prend en charge les CM2, un collègue nommé en septembre prendra en charge les CM1.
Les 5 premières leçons du cahier sont celles écrites en 2011-2012 alors que la classe était une classe de CM1. Nous reconstituons le sommaire à partir des leçons écrites par Solène.

Sommaire(3) du recueil de leçons 2012-2013

1. Des mots et des opérations à connaitre
2. Les nombres fractionnaires
3. Mesure : les longueurs
4. Utiliser une graduation en dixièmes et centièmes

Le nombre de leçons est passé à 14 (pour les CM2) à 4 (pour les CM2 de l'année précédente).
Deux éléments ont changé : Solène enseigne dans un cours simple et seule.
Nous pouvons alors supposer que ce professeur ne ressent plus le besoin de faire des traces écrites pour deux raisons :

- elle n'a plus besoin de passer d'un niveau à l'autre, elle peut rappeler les éléments de savoir à l'oral puisqu'elle n'a plus de cours double. L'écrit avait alors un rôle de « *substitution* » du professeur.
- elle ne ressent plus la nécessité d'écrire avec et pour une autre enseignante le savoir à partager.

Sommaire (4) du recueil de leçons en 2013-2014

Solène prend cette année-là la classe de CM1 dans l'intention de suivre cette classe pendant deux ans. Les CM2 sont pris en charge par une autre collègue. Le cahier de leçons suit l'élève du CE2 au CM2.
L'enseignante de CE2 fait coller 30 leçons souvent d'une demi-page. Solène ne prend plus en charge l'enseignement de la géométrie ni de la mesure. Cet enseignement est confié à l'enseignante qui assure la décharge (une journée par semaine), car Solène exerce en tant que maître formateur.

Sommaire(4) du recueil de leçons en 2013-2014

1. Partager
2. Le cercle
3. Lecture de l'heure
4. Les fractions
5. Les nombres fractionnaires
6. Les périmètres
7. Les angles
8. Les mesures de masses

Seules les leçons 1, 4, 5 sont celles produites par Solène.
Cette fois-ci seules trois leçons ont été écrites, ce qui va dans le sens des analyses du paragraphe ci-dessous. Les traces écrites ne sont plus produites car Solène porte toute la mémoire didactique de la classe. Pourquoi alors, reste-t-il ces trois leçons ?
La leçon « *partager* » est une trace produite pour installer une technique provisoire de la division. Nous avions observé des séances sur la division dans le cadre de notre mémoire (Allard 2011).
Plusieurs explications sont possibles :
- ces traces écrites correspondent à des enseignements nouveaux en CM
- ces traces ont été « *validées* » par la présence, l'intérêt qu'elles ont suscité pour une doctorante. Nous interprétons là, que le travail avec le chercheur a donné une certaine légitimité à ce texte même si le chercheur n'est pas directement intervenu

6.4 Analyse comparée des sommaires.

Le nombre de leçons produites seulement par Solène va de 14 leçons en 2008-2009 pour une classe de CM1 à 3 en 2013-2014 pour une classe de CM1. En 2012-2013 Solène travaille de nouveau seule, elle propose 4 leçons écrites à ses élèves de CM2.
Pour les années où Solène travaille en cours double avec sa collègue, sur les deux années, elles produisent 28 leçons soit une moyenne de 14 par an.
Enseigner en CM1 ou en CM2 n'affecte pas significativement le nombre de leçons produites. En revanche d'année en année le nombre diminue. Solène, lors d'un entretien téléphonique explique qu'elle produit suffisamment d'explications à l'oral, réagir à chaud ne lui demande pas de préparation en dehors du temps de classe. En revanche, l'élaboration d'une trace écrite à la maison lui procure un travail supplémentaire qui ne lui semble pas indispensable (entretien du 12/04/2015). Elle exprime aussi le fait que ses cours sont « *routinisés* », elle sait ce qu'elle a à dire même si elle a conscience que son discours change puisqu'elle tient

compte des procédures et des interactions langagières produites. Solène propose la définition suivante de l'institutionnalisation (mail du 13/04/2015) : « *Je prends le temps de te répondre. Pour moi l'institutionnalisation, c'est formaliser les informations issues de la recherche. Lors de cette phase, on va reprendre avec les élèves une définition de la notion, le vocabulaire utilisé, les différentes procédures qui ont permis de résoudre le problème. Il s'agit de fixer les connaissances.* »

La définition donnée nous permet de dégager ce qu'elle doit faire pour produire un écrit.

D'après Solène, exposer des connaissances conduit à formaliser, dire et reprendre une définition.

Reprendre et exposer les procédures participent à l'institutionnalisation. Enfin elle conclut en affirmant qu'institutionnaliser fixe les connaissances. Solène verbalise ses difficultés à écrire de tels textes, à la fois car elle ne sait pas formuler des règles généralisées mais aussi parce qu'elle estime qu'il est moins coûteux, en termes de temps, de le faire à l'oral. L'écrit ne semble pas alors, pour elle, participer à la mémorisation des connaissances.

Institutionnaliser, dans son discours, est lié aux verbalisations des élèves, c'est avec les élèves qu'il est possible de dire, de reprendre le vocabulaire et de montrer les procédures.

Enfin cette définition situe, pour Solène, le moment de l'institutionnalisation juste après une phase de recherche.

Nous avons mis en évidence une baisse significative du nombre d'EC écrites. Nous l'expliquons par la constitution des classes. Exercer dans un cours double rend moins disponible le professeur qui s'appuie alors sur de l'écrit. De plus les deux enseignantes se succèdent pour enseigner les mathématiques : l'écrit alors joue un rôle de support à la mémoire didactique de la classe.

Plusieurs raisons apparaissent pour expliquer cette baisse significative d'expositions de connaissances écrites, elles sont à la fois du côté de la gestion de classe et du manque de formation exprimée par le professeur mais aussi de l'absence de certitude qu'écrire a un rôle dans l'apprentissage. La croyance portée actuellement se retrouve dans les actions de ce professeur : un bon professeur prend en compte la parole des élèves et les fait manipuler.

Bien que nous l'ayons déjà noté dans le cadre de notre mémoire de recherche (sur une année d'observation seulement), nous restons surprise de l'inscription de la constitution des classes et du travail collaboratif avec sa collègue dans le Processus d'Institutionnalisation. Solène, lors d'une conversation téléphonique (4/05/2015) dira *« c'était plus simple d'écrire des leçons quand il y avait Danièle car cela me motivait et il fallait bien qu'on se mette d'accord ».* Cela montre que la composante sociale du professeur a un impact sur les expositions de connaissances écrites. Nous pouvons alors identifier que la dimension sociale du PI englobe aussi ce qui se passe entre les différents acteurs en dehors de la salle de classe.

7 Etude des expositions de connaissances écrites sur les fractions.

Rappelons rapidement que Solène produit une trace écrite (1) sur les « *nombres fractionnaires* » et parfois une autre trace intitulée (2) « *utiliser une graduation en dixièmes et centièmes* ». Cette dernière trace (2) apparait de manière plus privilégiée lorsque Solène est en responsabilité d'une classe de CM2, mais pas systématiquement : cette leçon (2) n'apparait pas en 2012-2013 pour la classe de CM2. Nous allons analyser la trace sur « *les nombres fractionnaires* »(1). Cette trace écrite (1) est proposée de 2010 à 2014. En 2013-

2014, Solène y apporte une modification. Elle en retire une partie intitulée: « *pour reconstituer une longueur à partir de plusieurs fractions* ».
Nous avons recopié cette leçon qui était en partie dactylographiée (Annexe 6) et nous en proposons un découpage afin d'identifier les différentes parties qui la composent. Cette trace écrite est constituée de 3 parties (notées EC1, EC2, EC3) dont nous proposons une analyse dans les paragraphes suivants :

<table>
<tr><td>EC1</td><td colspan="2">une proposition de définition.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les nombres fractionnaires.
<u>Définition</u> : Un nombre fractionnaire s'écrit avec un nombre au numérateur et un nombre au dénominateur.
$\frac{3}{4}$: Le nombre au-dessus de la barre de fraction est le numérateur.
: Le nombre en dessous est le dénominateur.
Numérateur, barre de fraction et le dénominateur forment un nombre fractionnaire.</td></tr>
<tr><td>EC1</td><td colspan="2">des exemples de lecture de fractions dites usuelles.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les fractions les plus utilisées dans la vie courante sont celles qui représentent:
½ : se lit un demi ou une moitié.
¼ : se lit un quart
1/3 : se lit un tiers
¾ : se lit trois quarts.</td></tr>
<tr><td>EC 2</td><td colspan="2">des exemples de leur utilisation dans la vie courante.</td></tr>
<tr><td colspan="3">→Tu as déjà dû entendre ces expressions :
« Donne-moi la moitié de ce gâteau », « j'arrive dans une demi-heure », « ce gâteau est un quatre-quarts », « un quart d'heure vient de s'écouler », « cet animal passe un tiers de son temps à dormir », « verse un tiers du lait », « dans trois quarts d'heure le gâteau sera cuit », « nous avons fait les trois quarts du chemin… ».</td></tr>
<tr><td>EC2</td><td colspan="2">Equivalence d'écriture</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les fractions servent pour de nombreux autres calculs.
Un demi, c'est aussi la moitié d'une unité. On écrit
Un quart c'est la moitié de la moitié.

Un tiers c'est une unité séparée en trois.

Trois quarts c'est trois fois le quart d'une unité.</td><td>$1=\frac{2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$
On écrit.
$1=\frac{4}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
On écrit.
$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$
On écrit.
$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
$1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$</td></tr>
<tr><td>EC3</td><td colspan="2">Représentation graphique du fractionnement de l'unité et justification de plusieurs égalités.</td></tr>
</table>

	Trois années de suite ce titre fait l'objet de trois textes différents que nous notons T1, T2, T3 La trace écrite de 2011-2012 est le fruit de la collaboration des deux collègues, elle est constituée de T1 et T2. En 2012-2013 Solène conserve la partie intitulée : « *pour reconstituer une longueur à partir de plusieurs fractions* » (T2), la première partie devient un affichage (T1). En 2013-2014, T1 et T2 disparaissent et semblent remplacées par T3. On retrouve des traces de T3 les années précédentes mais dans le cahier d'exercices.

7.1 Partie A de la leçon : une proposition de définition.

EC1	*une proposition de définition.*
Les nombres fractionnaires. **Définition** : Un nombre fractionnaire s'écrit avec un nombre au numérateur et un nombre au dénominateur. $\frac{3}{4}$: Le nombre au-dessus de la barre de fraction est le numérateur. : Le nombre en dessous est le dénominateur. Numérateur, barre de fraction et le dénominateur forment un nombre fractionnaire.	

La définition proposée tient plutôt à une description dans le sens où la fraction est décrite par rapport aux éléments qui la composent : des nombres et une barre de fraction. Conformément aux programmes l'expression « *nombre fractionnaire* » désigne la volonté du professeur de dire que la fraction est un <u>nombre</u> qui s'écrit sous une certaine forme : <u>une écriture fractionnaire</u>. L'expression « *nombre fractionnaire* » nous apparait comme le résultat d'une expression raccourcie. Dans le « *nombre en cycle 3* » nous retrouvons cette expression qui, d'après les auteurs est utilisée jusqu'à la fin du collège : le « *nombre en cycle 3* » « *Le terme fraction est couramment utilisé pour désigner une écriture fractionnaire d'un nombre rationnel, que jusqu'à la fin du collège on appelle aujourd'hui nombre fractionnaire* ». Nous n'avons pas retrouvé cette expression dans un des manuels de 6ème consulté (Hélice 2009) co-écrit par des didacticiens. Les auteurs de ce manuel parlent d'écriture fractionnaire et d'écriture décimale d'un nombre ou d'un quotient.
Le mot nombre est écrit sept fois dans ces quatre lignes de définition (partie A) proposée par Solène. Concevoir la fraction comme un nombre semble donc important, ce court texte l'affirme à plusieurs reprises. Enfin, la fraction est envisagée comme un ensemble de symboles : chiffres et barre de fraction. Numérateur et dénominateur sont désignés comme étant des nombres alors qu'aucun sens n'est proposé pour la barre de fraction. Mais est-il envisageable d'en proposer un, puisque l'un des sens possibles est de dire que $\frac{4}{3}$ = 4 : 3 , le signe « : » renvoyant à la division sans pour autant l'effectuer (ne pas effectuer une opération à l'école est très inhabituel). Le numérateur devient alors le dividende et le dénominateur le diviseur. Ajoutons que dans le texte proposé dans le « *nombre en cycle 3* », un sens est donné à la barre de fraction comme indiquant une division : « *si l'on convient que le trait indique une division, le nombre* $\frac{a}{b}$ *peut dont être considéré comme le quotient des deux nombres entiers a et b* ».

Un sens de cette barre de fraction est suggéré également dans le manuel de sixième Hélice, par l'égalité suivante : $\frac{4}{3} = 4 : 3$ (p208).
Solène ne définit pas la fraction comme un quotient, ceci en accord avec les programmes de 2002 et de 2008. Remarquons que cette limite des programmes est réaffirmée dans les annexes des propositions des nouveaux programmes de 2015 : « *Du CM1 à la 6ième, on abordera différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en sixième.* ».

7.2 Partie B de la leçon : des exemples de lecture de fractions dites usuelles.

EC1	des exemples de lecture de fractions dites usuelles.
Les fractions les plus utilisées dans la vie courante sont celles qui représentent [60]: ½ : se lit un demi ou une moitié. ¼ : se lit un quart 1/3 : se lit un tiers ¾ : se lit trois quarts.	

La partie B souhaite montrer que l'étude des fractions est nécessaire car ce sont des nombres utilisés dans la vie courante, en tout cas pour les fractions dites usuelles ou simples.
Le texte rappelle cela et propose des exemples de ces fractions. Ce texte propose d'abord de lire les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et enfin $\frac{3}{4}$. L'ordre de lecture est hiérarchisé par la valeur du numérateur et non par celle du dénominateur. Le texte propose d'abord de lire les fractions dont le numérateur vaut 1 (fractions de l'unité), puis propose la lecture d'une fraction dont le numérateur vaut 3. C'est aux lecteurs de déduire que toutes les fractions dont le dénominateur vaut 2 se lisent en « *demi* ». C'est aux lecteurs de comprendre que la lecture débute par le nombre du numérateur puis par celle du dénominateur. La règle de lecture n'est pas généralisée.

7.3 Partie C : des exemples de leur utilisation dans la vie courante.

Ce paragraphe liste une série d'expressions assez courantes. Les fractions sont utilisées dans les cas où :
- on cherche à prendre <u>une fraction d'une unité de référence</u> : « l*a moitié de ce gâteau, une demi-heure, un quart d'heure vient de s'écouler, dans trois quarts d'heure le gâteau sera cuit* »,
- on cherche à prendre <u>une fraction d'une grandeur non déterminée</u> « *trois quarts du chemin, dormir un tiers de son temps* ». Cela évoque l'aspect opérateur des fractions
- on évoque un aspect lié <u>à la proportionnalité</u> dans l'exemple du « *quatre-quarts*» car les 4 ingrédients sont pris en proportion égale par rapport à leur masse : le poids des œufs, de la farine, du sucre et du beurre est identique.

[60] *Nous avons conservé les notations proposées dans la leçon, c'est-à-dire avec la barre de fraction oblique.*

Ces expressions ne relèvent pas tout à fait des mêmes aspects des fractions. À la lecture de ce texte, il nous semble que l'objet de ce paragraphe est de montrer que les fractions sont des nombres qu'on utilise tous les jours. Les vidéos réalisées lors de la lecture et les explications fournies nous donneront d'autres renseignements sur l'objet de ce paragraphe.
Ce texte répond aux injonctions institutionnelles et aux croyances des PE que nous traduisons ainsi : « *les mathématiques existent dans la vie courante, c'est ce qui motive en partie leur enseignement* ». En revanche, l'exploitation mathématique de ce texte, nous amènerait à travailler sur des aspects des fractions qui sont à la limite du programme.

7.4 Partie D : fractions et calculs

Cette partie se distingue des autres parties car les élèves sont sollicités pour écrire une partie du texte. Nous distinguons les égalités qui proposent des sommes de fractions $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ et celles qui proposent des équivalences d'écriture $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. La règle d'addition de fractions au même dénominateur n'est pas explicitée.
De plus, le discours qui accompagne ces égalités ne correspond pas toujours à ce qui est écrit. Ainsi il est écrit que « *trois quarts c'est trois fois un quart de l'unité* », l'égalité qui illustre cette phrase est une addition réitérée : $\frac{3}{4}= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ alors qu'à la lecture du texte, nous pensions plutôt à l'égalité $\frac{3}{4} = 3x \frac{1}{4}$ u. (u symbolisant l'unité). Il serait plus juste de dire « *trois quarts de l'unité c'est trois fois un quart de l'unité* » et faire ainsi apparaitre l'unité u des deux côtés de l'égalité. Ceci est assez constant dans les écrits de Solène, l'unité u apparait seulement d'un côté de l'égalité.
Pour comprendre que $\frac{1}{2} =\frac{2}{4}$, dans le contexte d'introduction des fractions en utilisant une bande unité de référence, il est nécessaire (chapitre 2) de bien avoir compris que l'unité est subdivisée en sous unités égales. Les élèves découvrent en premier lieu des fractions d'unité et devront généraliser que dans tous les cas[61] $\frac{1}{2} =\frac{2}{4}$, C'est une des raisons pour lesquelles, les programmes anglo-saxons conseillent de multiplier les différentes représentations des fractions.
De plus, il est écrit sans étape intermédiaire et sans discours associé que $1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$. À ce moment-là de l'écriture, les élèves ne connaissent pas les règles de calcul des fractions au même dénominateur. C'est à leur charge de retrouver que la somme d'un quart et trois quarts valent une unité. Retrouver cette égalité passe par la manipulation des bandes, c'est par juxtaposition de la bande un quart et trois quarts et par comparaison avec une bande unité qu'il est possible d'affirmer que « $1= \frac{1}{4}+\frac{3}{4}$. ». La justification est réalisable avec du matériel et n'est pas possible par le calcul. Cette difficulté à produire des calculs nous renvoie à ce qu'écrit Vivier (2014)

> *« Peut-il y avoir des nombres sans calcul ? À ce propos, ce n'est sans doute pas un hasard que le rapport de la commission Kahane (2002) ne propose pas de section « nombres » mais des sections plus générales sur le calcul. Artigue (2007,p. 47), à la suite de Bronner (2007), précisent que « nombres et calcul vivent en symbiose ». Effectivement, un calcul avec des nombres est, du point de vue de*

[61] *Avec des pommes, des globes terrestres….cf chapitre2*

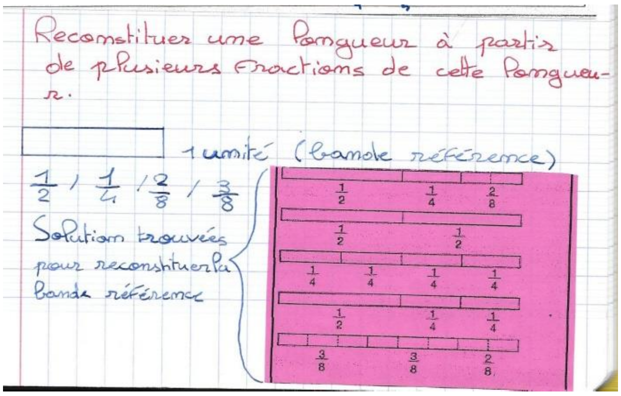
> *Duval, un traitement dans un registre numérique. D'ailleurs, peut-il y avoir calcul sans représentation sémiotique ? Un calcul n'est-il pas qu'un traitement sémiotique ? Du moins en apparence et pour les calculs automatisés, basés sur un algorithme. »* (Vivier 2014, p.4)

Dans les classes de fin d'école, les fractions sont souvent découvertes en utilisant du matériel. Comment un enseignant peut-il passer des actions sur du matériel au registre numérique sans avoir accès aux calculs ?
De 2010 à 2013 une trace T2 (annexe 5) proposait une représentation graphique des fractions sous forme de bandes. En 2013-2014 c'est une grande affiche qui remplacera définitivement cette partie de la leçon.
Ajoutons qu'enfin ce paragraphe annonce que « *les fractions servent pour de nombreux calculs* ». Comment cette liste d'égalité permet-elle de faire le lien entre les nombres et le calcul ? Aucune règle de calcul n'est énoncée, ce qu'on lit, ce sont des égalités liées aux manipulations ou bien des équivalences d'écritures.

7.5 Analyse des parties modifiées.

a/ Année 2011-2012

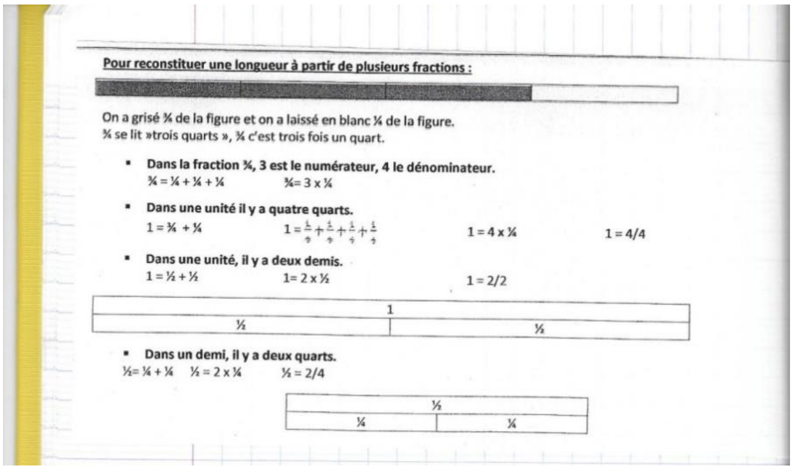
Solène modifie la fin de sa leçon année après année. Cette variabilité montre bien que le professeur n'est pas satisfait de ce qu'il propose.



En 2011-2012, le texte est écrit au tableau et recopié par les élèves. Un dessin rappelle ce qu'est une unité appelée aussi « *bande de référence* », puis nous lisons une énumération de fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}$. Ces fractions correspondent aux longueurs des bandes dont disposent les élèves pour reconstituer la bande unité. Cette partie de la leçon n'a de sens qu'à condition d'avoir été présent en classe puisque rien ne justifie l'écriture de ces 4 fractions. L'encart rose est une photocopie extraite de ERMEL, elle est présentée comme « *la solution trouvée pour reconstituer une bande de référence* ». Le lecteur peut alors se demander de quelle solution et de quel problème on parle puisqu'il n'y a pas de texte accompagnant ces représentations. Le rôle de cet encart est sûrement de permettre en plus d'une correction, une « *visualisation* », un « *soutien de la mémoire* ».

b/ Années 2011-2012-2013

La partie ci-dessous est proposée pendant trois ans, elle fait partie de ce qui est donné aux élèves pendant 3 ans. En 2011 elle suit la partie présentée précédemment (encart rose). En 2012, elle est collée dans le cahier et en 2013 elle sera suivie d'une autre partie (collée les années antérieures dans le cahier d'exercices).
Ce texte expose plusieurs écritures équivalentes de fractions inférieures à 1 dont la somme ou le produit vaut 1. Une représentation graphique est proposée qui permet d'illustrer que deux demis valent 1 et que deux quarts valent un demi. Ce texte articule les trois registres verbaux : « *dans une unité il y a quatre quarts.* », symbolique ou numérique ($1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$) et graphique (représentation dessinée des bandes de rouleau de caisse).



Pour reconstituer une longueur à partir de plusieurs fractions :

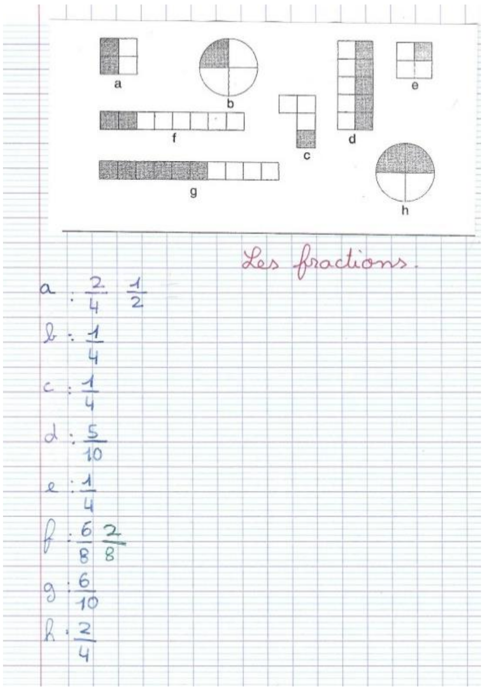
On a grisé $\frac{3}{4}$ de la figure et on a laissé en blanc $\frac{1}{4}$ de la figure.
$\frac{3}{4}$ se lit »trois quarts », $\frac{3}{4}$ c'est trois fois un quart.

- **Dans la fraction $\frac{3}{4}$, 3 est le numérateur, 4 le dénominateur.**
  $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$
- **Dans une unité il y a quatre quarts.**
  $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ $1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $1 = 4 \times \frac{1}{4}$ $1 = 4/4$
- **Dans une unité, il y a deux demis.**
  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $1 = 2 \times \frac{1}{2}$ $1 = 2/2$

- **Dans un demi, il y a deux quarts.**
  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} = 2/4$

c/ Année 2013-2014

La partie présentée ci-dessus « *reconstituer une longueur à partir de plusieurs fractions* » fait l'objet d'une affiche qui reprend l'encart rose de l'année 2011-2012. Solène ne propose donc plus de texte proposant une articulation des registres. L'affiche prend en charge une ostension de ce qui relève du registre graphique et symbolique sans discours associé.
La nouvelle partie collée (TC) était, les années précédentes, proposée comme une activité d'entrainement conformément au projet d'ERMEL. Il n'y a aucun texte. Cette leçon est constituée de différentes représentations graphiques des fractions dans un contexte de mesure d'aires. Il s'agit de déterminer le nombre d'unités grisées par rapport à l'ensemble de la surface. C'est une tâche assez classique. Huit figures sont proposées. La figure c (en forme de L) peut paraitre plus atypique (car n'est pas une figure « *usuelle* » en géométrie). Les autres formes sont des carrés, des rectangles ou des cercles. Les six polygones sont quadrillés avec la même unité, les cercles sont subdivisés en quart de cercle. Sous la photocopie de ces huit figures, on peut lire la correction de la question posée à l'oral.
Coller cette activité dans le cahier de leçons montre que l'enseignante donne de l'importance à ce type de tâches. Par ailleurs, nous avons relevé l'évaluation qui clôt cette séquence. Cette évaluation ne porte que sur l'expression de la fraction qui correspond au rapport « *partie coloriée sur un tout* ».(Annexe 17)

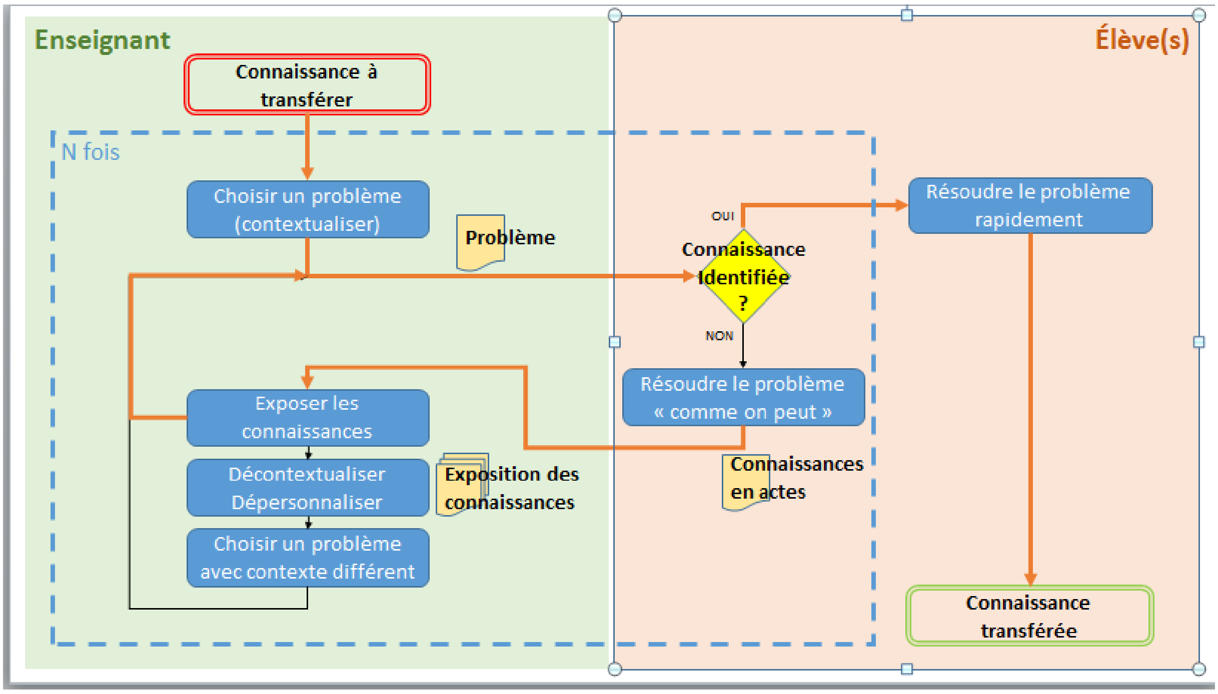


Solène fait montre de régularité quand il s'agit de proposer une exposition de connaissances écrites. Notons que les contraintes institutionnelles sont respectées : la fraction est déclarée être un nombre. La fraction est présentée comme ayant un intérêt dans la vie de tous les jours. Plusieurs décompositions de l'unité en fractions usuelles sont écrites. Le texte qu'elle propose emprunte aux ressources utilisées. Ce texte propose une suite d'exemples et un essai de définition. Les énoncés n'induisent pas de généralisation. La référence à l'unité est implicite comme dans le ERMEL. La dernière partie de cette trace varie. Cette variation est toujours sur les mêmes enjeux : l'articulation entre les trois registres.

Dans le chapitre 1, nous avions développé des conditions nécessaires à la transmission d'une notion. Nous avions appelé ce processus : le processus de décontextualisation-contextualisation et recontextualisation (PCDR). Le projet proposé par Solène ne permet pas d'accomplir le processus dans son intégralité car les situations choisies ne proposent qu'un seul contexte. De plus les extraits des ressources ne permettent pas non plus au professeur de construire des textes ayant un degré de généralisation plus élevé. Le texte des EC apparait alors contextualisé , les énoncés sont peu généralisés.

Dans le schéma que nous proposons ci-dessous, nous avons épaissi les traits correspondant au processus tel qu'il est « *prévu* »par Solène.

Les expositions de connaissances écrites sont de degré 3, c'est-à-dire peu décontextualisés Le processus de généralisation ne peut pas être activé car aucun jeu de cadres ou de boucles PCDR n'apparait dans le projet. Le schéma suivant propose une modélisation possible du processus tel qu'il existe dans la classe de Solène.



7.6 ***Un essai de production d'EC : écrire une règle générale de lecture des nombres rationnels selon leurs écritures fractionnaires.***

Le texte de Solène ne généralise pas la règle de lecture, l'intention y est. Cap Math (p4 du dico math CM1 CM2) propose la règle suivante « *il faut utiliser le suffixe ième, sauf pour les demis, les tiers, les quarts* » suivis de deux paragraphes intitulés « *demi, tiers, quart* » et « *les autres fractions* ». Chaque paragraphe propose des exemples sans mentionner les mots de numérateur et de dénominateur. La règle proposée par Cap Math est succincte et semble facile à retenir, toutefois elle n'indique pas le sens de la lecture d'une fraction. Cela peut paraitre non essentiel puisque naturellement nous lisons du haut vers le bas, ce qui est plus intéressant c'est l'exercice de la généralisation d'une règle qui pousse à utiliser du vocabulaire et à identifier les tâches et leurs ordres de réalisation.

Notre proposition :

Pour lire une fraction, il faut lire d'abord le nombre du numérateur suivi du nombre du dénominateur en ajoutant le suffixe ième. Cette règle ne s'applique pas aux fractions dont les dénominateurs sont 2, 3, 4. Les fractions dont le dénominateur vaut 2 se lisent en donnant le nombre du numérateur suivi des mots « *moitié* » ou « *demi* ».
Les fractions dont le dénominateur vaut 3 se lisent en disant la valeur du numérateur suivi du mot « *tiers* ».
Les fractions dont le dénominateur vaut 4 se lisent en disant la valeur du numérateur suivi du mot « *quart* ».
Dans cet exemple, nous constatons que dès qu'il s'agit de généraliser une règle (même une règle de lecture), il est nécessaire d'utiliser un vocabulaire adéquat : numérateur et dénominateur pour orienter la lecture. L'utilisation de ce vocabulaire est indispensable et évite des formulations tel « *nombre du haut* » ou « *nombre du bas* » et donne une raison d'apprendre ces mots. Proposer une règle généralisée oblige l'auteur de ces lignes à découper la tâche en plusieurs étapes :

- lire le nombre du numérateur
- lire le nombre du dénominateur
- ajouter à cette lecture ième si le dénominateur n'est ni 2 ni 3 ni 4.

Enfin remarquons que nous favorisons la lecture en ième plutôt que celle où on lit la barre de fraction : « *sur* » comme trois sur sept. La lecture en « *sur* » renvoi à l'aspect ratio (voir chapitre 2) de la fraction qui n'est pas spécifiquement du programme de cycle 3.

Nous avons interrogé une élève en réussite, Mahault (2013-2014) sur la manière dont il fallait lire une fraction : « *je ne sais plus, mais on lit d'abord celui du haut puis celui du bas. Ça finit par ième sauf pour trois demis, trois tiers, trois quarts* ». Puis nous lui avons demandé quelle serait la règle pour lire toutes les fractions en demi, tiers et quart. Elle s'interroge et finit par nous demander comment s'appelle le nombre du bas, nous lui renvoyons la question, elle répond « *dénominateur* ». Enfin elle conclut en disant « *pour les dénominateurs 2, 3, 4 il faut les lire autrement sans le ième, et le nombre du haut c'est le numérateur* ».

Mahault nous montre ainsi qu'elle a été capable de construire une règle qui fonctionne en utilisant un vocabulaire adéquat plutôt qu'une série d'exemples. Les explications de Mahault illustrent qu'il est possible pour une élève de bâtir une règle la plus générale possible.

7.7 Comparaison des EC produites en CM2 avec une classe de sixième.

Nous avons pu recontacter Mahault en sixième. Elle nous a photocopié la première leçon sur les fractions. Cette leçon débute par un rappel : « *la fraction est le quotient du nombre entier « a » par le nombre entier « b ».$\frac{a}{b}$, a est le numérateur et b le dénominateur.* ».

Cette définition essaie de généraliser en utilisant des lettres mais en oubliant d'écrire que b est différent de zéro.

Suite à cette définition, le texte montre quelques exemples :

$\frac{3}{4}$, 3 est le numérateur et 4 le dénominateur.

$\frac{3}{4}$ est le quotient de 3 par 4 ainsi : $\frac{3}{4}\text{x}4 = 3$ et $\frac{9}{10}$x10=9.

La suite du cours se poursuit sur des définitions de « fractions décimales » et de règles comme « *pour passer d'une fraction décimale à une autre, il suffit d'ajouter (ou d'enlever) le même nombre de zéros au numérateur et au dénominateur* ».

Nous constatons plusieurs ruptures avec l'école (Mahault était dans la classe de Solène). Tout d'abord que la fraction est un quotient n'est pas un rappel. Le calcul : $\frac{3}{4}\text{x}4 = 3$ ne va pas de soi nous semble-t-il. Enfin sur une page de cours (même format que son cahier de CM2), Mahault est confrontée à deux définitions et à une règle ce qui est déjà autant que l'ensemble des cours de son année de CM2. En revanche dans les exemples sur les fractions décimales, Mahault retrouve ce qu'elle a déjà rencontré.

Cette courte comparaison induit des questions sur la liaison école collège. L'importance et la quantité des écrits en mathématiques étant en rupture entre le collège et l'école. Comment des élèves plus faibles peuvent-ils prendre en charge cette rupture ?

8 Conclusion

Le projet de Solène est globalement stable au regard de l'itinéraire cognitif. En revanche d'année en année le nombre d'expositions de connaissances diminue très significativement. Nous en avons proposé des éclairages.
Les quelques variabilités exposées permettent de pointer de réelles difficultés pédagogiques et didactiques. Pédagogiques dans le sens où l'enseignante n'arrive pas à suivre la progression des ressources (dans le cas de l'usage unique du manuel) et doive les repenser une progression prenant en compte le temps de l'enseignement et cherche à rendre attrayante la discipline grâce à des manipulations. Didactiques dans le sens où les séances retenues mettent en évidence un seul aspect des fractions « *partie d'un tout* » ce qui est, à notre avis, une réelle difficulté pour écrire des énoncés décontextualisés. Notons également que les fractions sont introduites comme rendant possible l'expression de nombre plus petit que un (fraction de l'unité) mais il n'y a pas de réelle prise en charge didactique de cette unité. Les ressources donnent peu d'explications sur l'importance de cette représentation de l'unité. Une des ressources propose des EC écrites dans un fascicule à part du manuel, il est écarté par Solène. Nous émettons l'hypothèse que les EC sont liées, en primaire, avec les choix de l'itinéraire cognitif. Le rôle des EC n'étant pas là, pour montrer un contenu mathématique mais plutôt comme aide, support de la mémoire didactique : rappeler l'activité réalisée mobilise les procédures et cela semble suffisant pour construire le savoir.
Enfin le projet de Solène ne permet pas d'effectuer plusieurs boucles du PCDR, et nous nous demandons comment les élèves vont réussir à construire les fractions comme nombres. Nous rappelons que les Instructions officielles indiquent d'enseigner les fractions comme des nombres sans avoir réellement la possibilité d'effectuer des calculs avec ces nouveaux nombres.
Pour conclure, les expositions de connaissances écrites ne se révèlent pas être la clé de voûte du Processus d'Institutionnalisation sans pour être complétement absentes du processus.
C'est pourquoi dans la prochaine partie, nous allons traiter des expositions de connaissances orales de ce professeur.

Chapitre V – Solène : analyse des expositions de connaissances orales

Cette partie du chapitre est consacrée à l'étude des Expositions de connaissances réalisées à l'oral sur un temps long, à savoir, trois années scolaires consécutives, pour un même enseignant.
Nous appelons l'année 2011-2012(année1), puis 2012-2013(année2) et enfin l'année 2013-2014 (année 3). Dans la partie précédente, nous avons étudié et analysé le projet global construit à partir de deux ressources ainsi que les expositions de connaissance écrites produites par ce même professeur. Nous en avions conclu que l'essentiel des EC n'était pas réalisé à l'écrit. L'étude des EC à l'oral est alors incontournable <u>pour avoir des indications sur le contenu des connaissances transmises mais aussi sur la manière dont elles sont transmises.</u> L'étude des EC écrites (partie 1 du chapitre 4) est présentée de manière chronologique sur 5 ans.
Pour les EC orales, l'étude ne sera pas chronologique, nous allons l'expliquer dans la partie méthodologie.
Alors que les EC à l'écrit sont identifiables, le texte du savoir étant collé ou écrit dans un cahier spécial, il n'en est rien pour les EC à l'oral. À l'oral comment identifier ces EC ? Quels indicateurs va-t-on retenir pour décider que ce qui est dit est une EC ? Que penser d'une EC produite suite à la question d'un élève ? Les autres élèves s'en emparent-ils ou attendent-ils que la caravane passe ? Ce sont ces questions qui nous préoccupent. Pour y répondre, nous devons préciser notre méthodologie.

1 Méthodologie : Précisions

1.1 <u>Précisions sur les données</u>

Nous avons filmé 12 séances sur trois ans sur le thème : des fractions aux fractions décimales. Pour notre étude, nous avons retranscrit toutes les séances sur l'enseignement des fractions soit 9 séances dans leur totalité. Les 2 séances sur les fractions décimales (2012-2013) sont partiellement retranscrites ainsi qu'une séance sur les fractions décimales (2013-2014)[62]. Nous nous en servirons pour illustrer parfois notre propos mais ces séances ne font pas l'objet de notre analyse.
L'année (1) Solène enseigne une partie seulement des fractions en CM2, c'est la première fois qu'elle suit le déroulement construit en collaboration avec sa collègue. Nous avons pu filmer deux séances sur l'introduction des fractions.
L'année (2) correspond à la deuxième année d'essai de ce déroulement en CM2. C'est aussi la première année où Solène travaille sans sa collègue. Nous avons pu filmer 5 séances et avons recueilli les cahiers d'exercices, les évaluations et le cahier de cours.

62 Une séance a été difficile à filmer, arrivée d'un gâteau d'anniversaire en début de séance, élèves qui ne cessaient de s'invectiver. La mise au travail a été difficile voire impossible.

L'année (3) est donc la troisième année, mais cette fois-ci Solène s'adresse à des élèves de CM1. Nous avons pu filmer 5 séances et avons recueilli les cahiers d'exercices, les évaluations et le cahier de cours

Pour les années (2) et (3), nous pouvons mettre en perspective les EC orales et ce qui a été produit à l'écrit (exercices et cours). L'année (2) est la plus complète au niveau des données recueillies, nous avons pour cette année-là 5 séances filmées dont 2 sur les fractions décimales.

1.2 Spécificité des EC étudiées dans notre étude

1.2.1 Etude des EC dans le cas d'un enseignement en contexte avec usage d'un matériel.

Nous pensons qu'étudier les EC passe d'abord par une étude épistémologique et didactique (voir Chapitre2), nous n'avons pas fait cette étude pour le passage des fractions décimales aux nombres décimaux. Nous n'avons pas non plus étudié ce que la construction et l'utilisation de la droite graduée pouvaient avoir comme effet sur des EC et sur la construction des nombres décimaux. C'est pourquoi nous n'étudions pas le PI sur ces notions-là. En revanche, nous relevons les EC produites en lien avec l'apprentissage des fractions.

Par ailleurs, les EC produites ont des degrés de décontextualisation différents selon les contraintes liées à l'introduction (et l'entrainement) d'une notion (contexte, matériel, usage d'ostensifs). Par exemple, l'usage d'ostensifs comme le tableau de numération peut conduire à des dérives comme une utilisation de celui-ci qui masque le savoir et propose à la place des règles de fonctionnement de ce dernier (tableau de numération et de mesure).

Pour autant, il peut y avoir des EC sur le fonctionnement du tableau pour en apprendre les « *règles* » d'utilisation. Ce sont alors des connaissances qui ne sont pas directement des connaissances mathématiques mais incontournables si l'enseignement de la numération passe par ce tableau.

Dans notre étude, l'introduction de la nouvelle notion avec du matériel devrait conduire le professeur et les élèves à se détacher de ce matériel et à dépasser le registre de l'action. L'étude des fractions dans un contexte de longueur pousse le professeur et les élèves à instrumentaliser la bande unité, comme instrument de mesure (avec ses schèmes d'utilisation). De plus, l'utilisation de la bande unité et de ses sous-unités requiert des connaissances sur les mesures de longueurs (qu'est-ce qu'une sous-unité ?). Enfin le contexte, de mesure de longueur ou d'aire ne prend en compte que des grandeurs continues ou « *semi-continue* »[63]. Instrumentalisation de la bande unité, connaissances sur les mesures et nature des grandeurs en jeu vont avoir, d'après nous, un impact sur les EC.

1.2.2 Première comparaison des itinéraires cognitifs

Suivre une enseignante sur trois ans, va nous permettre alors de montrer comment elle s'affranchit ou non de ses contraintes, comment elle intègre ou non dans son cours ce qui s'est passé l'année précédente, comment elle prend en charge les interactions langagières avec les élèves, ce qu'elle produit et comment elle le produit.

[63] La bande et sa mesure représentent une grandeur continue, mais dès que l'enseignante la découpe, il est possible de dénombrer le nombre de morceaux (alors les grandeurs sont discrètes).

Nous avons déjà présenté ce tableau, il met en correspondance des intentions pédagogiques associées à la consigne donnée. Nous avons découpé en épisode les séances, pour cela nous avons identifié différents contenus (appelés parties) liés à différentes tâches (situation problèmes, exercices d'entrainement, lecture d'un cours). Ainsi nous pouvons reconstituer le contenu des séances comme suit. Les tableaux 3 et 4 en annexe 3 et 4 permettent d'avoir un aperçu des activités proposées (voir aussi chapitre 4, paragraphe 1.3.3)
<u>Les cases grisées correspondent aux séances filmées</u>. Elles ne sont pas toutes intégralement retranscrites mais nous les avons toutes visionnées. Les séances ne sont pas constituées des mêmes parties. Les parties correspondent à des exercices ou des situations dont nous connaissons les sources. Dans les cahiers d'exercices, il y a parfois des exercices provenant d'autres sources ou inventés. (Annexe 4)
Par exemple pour l'année (2), dans les cahiers du jour nous pouvons voir les traces des parties L et M réalisées. La partie L (7/02/2012) a été réalisée sur une bande de papier de 3 mètres, dans le cahier nous voyons quelques égalités mais pas la bande. La partie M est visible grâce à une correction dans le cahier du jour (21/02/2012)

Tableau n° 1 du nombre de séances prévues sur les fractions et les décimaux en deux ans

	Fractions								Ev	Fractions décimales et nombres à virgules.				Expositions des connaissances écrites.			affiche
Année/parties	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	EC1	EC2	EC3	EC4
1 (CM2)	●	●		●	●					●	●	●	●	●	●		●
2 (CM2)			●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
3 (CM1)	●	●		●	●		●		●					●	●		

L'année (1) : CM2, A+B+EC1+EC2+E+D, nous avons pu conserver cette année-là que le recueil de leçons seulement. Avec l'aide de l'enseignante nous avons pu établir l'itinéraire proposé.

Tableau n°5 : séances réalisées sur les fractions l'année (1)

Année 1	A 19/10/11	B19/10/11	EC125/11/11	EC2 25/11/11	E25/11/11	D25/11/11
Séance 1	●	●				
Séance 2						●
Séance 3			●	●	●	

Nous supposons que la partie D a été faite entre les séances 1 et 2.
L'année (2) :E+EC1+EC2+EC3+C+G+ H + K +J+I (évaluations A+B)non datées
Nous avons conservé : les cahiers d'exercices, le recueil de leçons et les évaluations d'un élève.

Tableau n°6 : séances réalisées sur les fractions l'année (2)

Année (2) Séance	E$_{21/11/12}$	EC1$_{23/11/12}$	EC2$_{23/11/12}$	EC3$_{23/11/12}$	C$_{23/11/12}$	G$_{30/11/12}$	H$_{31/11/12}$	K$_{15/02}$	J$_{4/02/13}$	L$_{7/02/13}$	M$_{21/02/13}$
1	● +affiche										
2		●	●	●	●						
3						●					
4							●				
5								●			
6									●		
7										●	
8											●

L'année (3) : A+B+D+EC1+EC2+E+Ebis+G+ I (évaluation A) :
Nous avons conservé, un cahier d'exercices, un recueil de leçons et toutes les évaluations de tous les élèves (1 seule évaluation).

Tableau n°7 : séances réalisées sur les fractions l'année (3)

Année (3) Séance	A$_{15/05/14}$	B$_{15/05/14}$	D$_{16/05/14}$	EC1$_{2/06/14}$	EC2$_{2/06/14}$	E$_{5/06/14}$	Ebis$_{6/06/14}$	**G**$_{21/06/14}$ et $_{23/06/14}$
1	●+affiche	●						
2			●					
3				●	●			
4						●		
5							●	
6								●

Ces trois tableaux nous permettent de voir que les itinéraires cognitifs proposés ne sont pas identiques d'une année sur l'autre car ils prennent en compte ce qui a été fait les années précédentes. Des parties sont communes.
Les parties E (situation extraite du ERMEL), EC1 et EC2 sont des incontournables de l'itinéraire cognitif. Sur les trois années nous avons pu filmer Solène sur ces trois parties.

1.3 Traitement des données :

1.3.1 Découpage en épisodes

Une séance de classe à l'école n'est pas consacrée exclusivement à des exercices, ou à une recherche ou seulement à des EC. Dans les pratiques des professeurs que nous étudions, s'enchaînent des temps de travail individuels, des activités de groupes, des activités collectives. Dans ces dernières, l'enseignant expose et les élèves écoutent ou échangent et se questionnent. Nous pouvons identifier les épisodes selon s'ils correspondent à une

- phase de rappel :
- recherche individuelle ou collective
- mise en commun des procédures.
- phrase de conclusion (niveau local) des synthèses (niveau global)
- ou à des moments dédiés et annoncés par l'enseignant aux expositions de connaissance.

Nous avons choisi de regarder ce qu'il se passe à ces moments particuliers car ils renseignent sur les 5 niveaux qui déterminent les i-genres.
Dans une séance tous ces épisodes ne sont pas nécessairement présents.

1.3.2 Les Indicateurs potentiels pour repérer les EC :

Les pratiques des professeurs expérimentés constituent un système complexe, cohérent et stable (Robert 2007). De plus ces professeurs ont aussi installé des routines (Butlen 2004). Ces routines peuvent nous permettent d'identifier les différentes phases et les indicateurs.
Les indicateurs de ces moments sont variables d'une enseignante à l'autre ce qui complexifie l'analyse des données. Nous pouvons en identifier deux catégories. Les indicateurs langagiers (verbal, non verbal) et ceux liés à la gestion de la classe (s'asseoir, ranger le matériel)
C'est pourquoi pour chacun des enseignants suivis, nous avons observé d'autres séances dans d'autres disciplines ou d'autres domaines des mathématiques pour repérer ses routines. Les séances filmées sur les décimaux, nous ont entre autres servis à cela.
Par exemple : Sasha fait assoir systématiquement tous ses élèves qu'elle regroupe par terre au moment des mises en commun : « *s'asseoir au sol* » est un indicateur du début de la mise en commun. Par ailleurs, elle distribue le texte de l'activité réalisée et demande après la mise en commun, de refaire l'activité. Cette distribution marque le début d'une phase de conclusion.
Pour d'autres encore, les EC sont marquées par le fait de ranger le matériel disposé sur les tables. Ranger signifie « *attention, nous devons écouter car une connaissance nouvelle va être présentée* ». Cette injonction est donnée avant les mises en commun ou les phases de conclusion. Forget (2011) explique aussi que la posture du maître « *prendre une expression spéciale* » d'après les élèves est un des indicateurs (plutôt de gestion pour celui-là) d'une EC.
Deux types d'indicateurs se dégagent : des indicateurs langagiers (« *taisez-vous, c'est important* », « *il faut écouter les autres* ») et des indicateurs de gestion (« *rangez votre matériel* »)
En revanche, l'indicateur commun pour repérer les moments particuliers d'EC s'exprime par la « *non-activité* » en termes d'action sur du matériel ou dans un cahier des élèves et par un nombre conséquent ou une quasi absence d'interactions langagières (monologue de l'enseignant) entre le maître et l'élève (ce qui est très contradictoire d'un enseignant à un autre).

1.3.3 Les indicateurs des EC de Solène.

Ainsi Solène débute souvent ses séances par « *Qu'a-t-on fait la séance dernière ?* » ou « *pouvez-vous définir … ?* » qui sont des indicateurs d'une phase de rappel liaison. Elle conclut ses séances par « *Qu'avons-nous appris aujourd'hui ?* », cette question est un indicateur d'une synthèse.
Parfois, certaines formulations indiquent que le professeur institutionnalise comme « *Qu'avons-nous appris aujourd'hui ?* », « *Pouvez-vous rappeler ce que nous avons fait*

<u>*hier ?* ».</u> D'autres fois les indicateurs langagiers ne nous apportent pas d'aide et nous nous appuyons alors sur des indicateurs de gestion.
Solène, lors des EC, demande à ses élèves de ne plus toucher au matériel, de s'asseoir à leur place. Lors de ces moments, les élèves sont sollicités individuellement à venir exposer leur réussite ou leurs difficultés au tableau.

1.3.4 Des transcriptions au tableau des épisodes.

À partir des transcriptions complètes (Annexes : Transcriptions de 1 à 15) nous avons extrait ce qui correspond à des expositions de connaissance. D'une part nos annexes sont constituées des transcriptions complètes (données brutes). Nous en précisons la date, la durée et la lettre de la tâche correspondante dans le tableau (annexe 4)
D'autre part, chaque transcription est l'objet d'un premier traitement qui permet l'élimination d'interactions langagières et de commentaires afin de mettre en évidence les EC. Pour cela, nous recopions essentiellement ce que dit le professeur, parfois ce que disent les élèves (qui répondent à une question ou formulent une demande pour éclaircir un point).
Nous traitons les données brutes extraites afin de compiler les expositions de connaissances en prenant en compte parfois les liens entre la question posée et la réponse des élèves pour rendre compte des connaissances qui ont circulé. Nous devons faire des choix, certains s'imposant plus qu'autres. Ainsi les rappels à l'ordre, les commentaires sur tels ou tels cahiers oubliés ne sont évidemment pas des EC. En revanche, trancher pour déterminer si ce qui est dit est une EC ou pas, lors d'explications données en cours d'exercice, est parfois moins simple qu'il n'y paraît.
Ainsi dans une phase de rappel, l'enseignante explique aux élèves qu'il est plus difficile de trouver la moitié d'un nombre quand celui-ci a un nombre impair au dénominateur. Il fallait trouver la moitié de 50.

Enseignante 15 bis : Je répète ce que vient de dire Emma, <u>Comme ce n'est pas un nombre pair au niveau des dizaines. Tu descends à quarante,</u> <u>la moitié de quarante c'est quoi ?</u> la moitié de 40 c'est 20.La moitié de 10, c'est 5 donc 25,
La moitié de 50 c'est 25.

Dans cet extrait il y a la description d'une procédure : pour trouver la moitié de 50, il faut décomposer 50 en somme de nombres dont le chiffre des dizaines est pair pour le plus grand (40) + (10), en déterminer les moitiés et les additionner. Les connaissances à mobiliser sont « *savoir ce qu'est un nombre pair et savoir le nom des rangs des chiffres* ».
À aucun moment dans l'extrait Solène ne rappelle ce qu'est un nombre pair. De plus l'exposition de la procédure pour déterminer la moitié d'un nombre dont le chiffre des dizaines est impair n'est rappelée que rapidement.
Nous choisissons cet extrait comme étant un temps d'EC. Nous avons conscience du caractère diffus, improvisé et non abouti de cette EC. Cependant, dans la suite de la transcription, ce passage est important car repris plusieurs fois. Quand nous choisissons de classer ce qui est dit en tant que EC c'est toujours par rapport à l'ensemble de la séance et aux répétitions de cette EC.
Nous ne retiendrons pas nécessairement une EC isolée dite à l'attention d'un seul élève, ces EC isolées/individuelles sont importantes pour l'élève mais nous ne les retenons pas parce qu'elles ne sont pas reprises pour l'ensemble du groupe.
Nous pouvons dire qu'un de nos critères pour retenir une EC est son caractère « *collectif* » et les effets qu'elles pensent produire sur le « *collectif* » (les élèves écoutent, posent des

questions ou au contraire se retournent, posent des questions sans rapport avec ce qui a été dit).
Ce travail d'élimination et de tris réalisé nous recopions ces EC dans un tableau découpé en épisodes, puis nous les prélevons et proposons un texte pour montrer l'essentiel de ce qui a été dit dans la séance.

1.3.5 Mise en évidence des EC dans les tableaux des épisodes.

Le tableau des EC reprend les différents épisodes : différentes phases de la séance (rappel, recherche, mise en commun…)
Les traits en pointillés (-----) séparent les différents contenus. Par exemple, Solène montre ce qu'sont une bande et ses différentes nominations : « *bande unité, bande de référence* », puis poursuit en donnant un exemple de ce qu'est « *une écriture fractionnaire* ». Nos pointillés distinguent alors une EC liée à une présentation du matériel d'une EC liée à l'écriture fractionnaire. Ainsi pour chaque épisode apparaissent les EC correspondantes.
Dans le tableau des EC nous rappelons parfois les consignes.
De plus nous soulignons ce qui relève d'expositions de connaissances mais aussi les indicateurs langagiers ou de gestion qui induisent des EC.
Nous surlignons les remarques des élèves ou du professeur qui donnent des éléments de réflexion sur les EC sans être des EC. Ainsi Lara répond à une question en disant « nous n'avons pas de leçons » exprimant ainsi qu'elle ne peut répondre à la question car elle ne le sait pas, et pour cause elle n'a rien eu à apprendre.
Les prises de paroles sont numérotées ainsi « **Ens49 »** signifie que c'est au moins la quarante neuvième fois que l'enseignant parle. Par conséquent qu'il y a eu 49 échanges au moins avec les élèves.
Les tableaux complétés, nous recomposons un texte de savoir à partir de ce qui a été dit.
Ces tableaux des EC permettent de mettre en évidence les EC mais aussi de faciliter les comparaisons entre les parties communes des différentes séances.

Catégorisation des EC.

Dans le chapitre 1 nous avons distingué trois catégories d'EC correspondant à des énoncés de trois groupes différents.
Les $EC_{G,}$ sont les EC dont les énoncés de méthode ou de contenu montrent une généralité en s'éloignant du contexte. Dans une première analyse, nous avons relevé très peu d'énoncés formels, les énoncés sont le plus souvent des énoncés intermédiaires (Butlen & Pézard 2003) utilisant un exemple mais sans référence au contexte. Ils ont un certain degré de décontextualisation sans toutefois être formels.
Les EC_{rmc} sont des EC qui mettent en évidence l'existence d'une connaissance aussi « *petite* » soit-elle « *plier en deux c'est prendre une moitié* » en référence au contexte dans lequel a lieu l'activité de l'élève.
Les EC_{NC} reprennent ce qui a été fait mais dans un autre contexte, montrant ainsi que la connaissance en jeu dans un contexte « *fonctionne* » dans d'autres contextes ou autrement dit permet de résoudre d'autres exercices, d'autres problèmes.
Dans la reconstitution des textes des EC et de leur codage nous allons les catégoriser et voir comment se réalise la montée ou non vers des énoncés génériques (du particulier au général).

Nous noterons les mouvements d'une EC vers une autre de la façon suivante ainsi : $EC_{G}\rightarrow EC_{rmc}$ pour indiquer que dans l'énoncé articule du générique et va vers le particulier (ici le contexte de l'activité).

2 Analyse des données.

Nous ne proposons pas une analyse chronologique année par année. Nous préférons présenter de manière détaillée les analyses concernant l'année 2. Nous avançons plusieurs raisons à cela. Tout d'abord l'année 2 est la plus complète en termes de séances filmées, interviews de l'enseignante, et traces des élèves. (annexe 3)

De plus, c'est la deuxième fois que l'enseignante propose la plupart des situations, nous pouvons donc penser que nous n'assisterons pas à des phénomènes d'obsolescence des situations définis ainsi par Brousseau (1981) :

> *« Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant : les maitres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. Au lieu de reproduire des conditions qui tout en produisant le même résultat laissent libres les trajectoires, ils reproduisent au contraire une « histoire », un déroulement semblable à celui des années précédentes, par des interventions mêmes discrètes qui dénaturent les conditions didactiques garantes d'une signification correcte des réactions des élèves, les comportements obtenus sont apparemment les mêmes mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus en modifient le sens, plus proche du comportement culturel. » (Brousseau, 1981 p85-86)*

Les tableaux des épisodes ne figurent pas dans les annexes. Nous avons préféré laisser les transcriptions dans leur intégralité et souligner ce qui relevait des EC. Nous en laissons un à titre d'exemple dans les paragraphes suivants.
Pour chacune des activités que nous avons pu filmer, nous proposons une analyse a priori centrée sur les potentialités d'exposition des connaissances au regard des tâches à effectuer mais aussi des recommandations des ressources.

Présentation de la classe l'année (2) : année (2) 2012-2013.

Ces élèves de CM2 ont fait l'année précédente les activités A, B, C avec Danièle (l'autre enseignante de CM). L'étude des fractions débute donc par l'activité E. Cette année-là, deux nouveaux élèves sont présents dans la classe. L'un a un an d'avance, l'autre un an de retard. Une enfant du voyage, Sinaï, fréquente cette classe. Solène sollicite beaucoup Joël, l'élève qui a un an de retard et Sinaï qui n'est jamais présente dans la classe le Lundi.
Une autre caractéristique de cette classe est la présence d'un groupe de 6 élèves (Paul, Martin, Joël2, Valentin, Clément, Emma) extrêmement intéressés par les apprentissages et très participatifs.
Solène s'est présentée à l'examen du CAFIPEMF cette année-là une séance sur la symétrie axiale. La pression de cet examen conduit, en général, les enseignants à soigner encore plus particulièrement leur gestion de classe, ce qui est le cas pour Solène.
Les films montrent une classe où les règles sont respectées, les élèves ne se coupent pas la parole, lèvent la main, se mettent assez rapidement dans les tâches à effectuer.
Paix sociale et scolaire sont assurées.

2.1 Analyse a priori de l'activité E

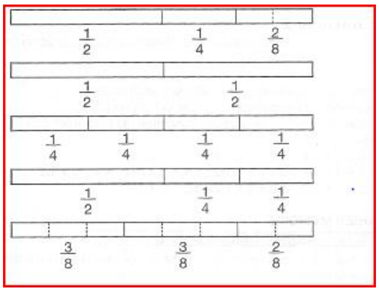
Cette séance est extraite du ERMEL CM2 (p456). Nous avons appelé partie E (Annexe 4) cette situation proposée les trois années de suite.
Eléments du déroulement avant l'analyse.
Cette séance est constituée de deux phases de rappel : une de liaison et l'autre provoquée.
La phase de recherche a pour objectif d'additionner des fractions de dénominateurs parfois différents (mais multiples de 2) dont la somme des termes vaut 1.
L'enseignante, propose la consigne suivante, après avoir fait construire lors de la phase de rappel provoquée, les bandes de longueurs $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{8}\ \frac{3}{8}$:
« *On souhaite fabriquer une bande de même longueur que la bande de départ en utilisant ces quatre morceaux. On peut ne pas utiliser tous les morceaux, on peut utiliser plusieurs fois le même morceau. Trouvez au moins quatre façons de procéder.* ».
Les bandes des 4 longueurs différentes sont affichées au tableau à côté de la bande de référence (la bande unité).
Les élèves sont invités à reformuler la consigne comprenant une triple contrainte

- Possibilité de ne pas utiliser les quatre <u>morceaux</u> (mot utilisé par la ressource)
- Possibilité d'utiliser plusieurs fois le même morceau
- Proposer 4 égalités différentes.

Eléments sur les résultats possibles et les procédures
Dix réponses sont possibles :

Somme de fractions usuelles valant 1		
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$	
$\frac{1}{2}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$	

Pour mener à bien cette tâche, les élèves doivent savoir que $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ et surtout avoir compris ce que représentaient à l'aide d'une bande les fractions d'une unité.
La consigne de la ressource spécifie qu'il faut « *demander au moins 4 façons* » de juxtaposer ces bandes. Cette contrainte conduit les élèves à produire au moins une somme dont les dénominateurs sont différents et à utiliser les fractions
$\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{8}$.
Deux aspects des fractions sont en jeu, la partie d'un tout pour donner du sens aux fractions inférieures à 1 et l'aspect mesure puisqu'on additionne des fractions de la mesure L (longueur de la bande qui vaut 1)
Le déroulement prévu par ERMEL et repris par Solène permet aux élèves de partir de la bande unité et de construire des gabarits mesurant $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$. Puis à partir de ces gabarits affichés, les élèves sont conduits à produire des sommes égales à 1. Pour cela ils peuvent « *opérer* » sur les fractions ou sur des représentations géométriques (schémas). L'ouvrage ERMEL indique que pour les élèves en difficultés, les gabarits peuvent être utilisés.
<u>Mise en commun :</u> ERMEL propose de s'appuyer sur une représentation schématisée pour la mise en commun et d'écrire les égalités correspondantes au fur et à mesure. (Annexe 5)



Ce qui est visé par l'ouvrage ce sont les équivalences d'écriture $\frac{4}{4}=\frac{8}{8}=1$ et les égalités de fractions ($\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$).
L'ouvrage propose donc quelques éléments de différenciation (possibilité d'utiliser les bandes), des aides pour la mise en commun (affichage) et insiste sur les équivalences d'écriture.

Nous voyons dans cette situation des potentialités d'exposition de connaissances non proposées par l'ouvrage comme :
-montrer qu'on peut additionner des fractions de dénominateurs différents
-montrer qu'on peut produire de nombreuses sommes de fractions égales à 1
-mobiliser les connaissances sur les équivalences d'écritures des fractions

2.2 Tableau des épisodes et mise en évidence des Expositions des Connaissances.

Chaque épisode est identifié (phase de rappel, recherche, mise en commun….). Les traits en pointillé (-----) séparent les différents contenus. Nous ne montrons le détail des analyses que pour un tableau dans ce paragraphe. Comme nous l'avons déjà signalé nous trouvions que d'accoler les tableaux des épisodes et les transcriptions étaient un peu redondant, nous avons fait le choix de laisser seulement en annexe les transcriptions travaillées mais pas les tableaux des épisodes.

2.2.1 Tableau des épisodes.

Phase rappel provoqué : durée des deux phases : 11'25
Aujourd'hui nous allons sur les fractions, nous allons revoir le travail abordé l'an passé sur les fractions. <u>C'est quoi une fraction ? Selon vous Marion…</u> **Marion :** les quarts, les doubles, les… **Ens1** : Viens m'écrire un nombre qui représente une fraction. **Elève** : un nombre ou un chiffre ? **Ens2 :** un nombre ! Une fraction c'est un nombre. -- **Marion** : inaudible **Ens3** : Tu m'as dit quoi ? Qu'est-ce que tu m'as dit ? **Marion :** un quart… **Ens4** : […] Allez retourne à ta place, Antonin ? Tu vas écrire un quart car elle a parlé d'un quart, est ce que tu sais écrire un quart ? […]Non on n'écrit pas en oblique *(l'enseignante efface),* on écrit en oblique sur la calculatrice. Écris-moi un quart. Oui, donc là <u>j'ai un quart</u> (montre la fraction écrite au tableau). <u>Est-ce que quelqu'un peut m'écrire une autre fraction ? Manon vient m'écrire une fraction.</u> Non écrivez moi un 1 correct *(les élèves font une barre et non le dessin usuel du chiffre 1).* Donc ça c'est quoi ? **Manon** : <u>un demi.</u> **Ens5** : ok, un demi. <u>Une fraction c'est ce nombre là</u> (elle montre la fraction ½ en faisant un geste qui l'entoure). Bon, je vais vous montrer une bande. **Elève** : inaudible --présentation de la progression --------------------------- **Ens6** : Je vais revoir avec tout le monde aujourd'hui de revoir les fractions et ensuite on va aller progressivement vers les fractions décimales puis vers les nombres décimaux. **Ens7 :** s'adressant à Joël *(élève redoublant son CM2 , cet élève vient d'une autre école)* Oui tu les as vues en CM1, nous c'est un choix on les voit en CM2, on installe autre chose correctement avant d'aborder cette notion-là, on voit les fractions en CM1 pour aller vers les

décimaux en CM2. L'an passé on a terminé très tard là-dessus. Donc je reprends ça aujourd'hui, comme ça je vois où tu en es et où en est Martin. D'accord ? (3minutes)
<u>Phase de rappel « *provoqué* »</u> : L'introduction cette activité passe par un travail collectif dans lequel les élèves viennent au tableau montrer comment à partir d'une bande unité ils « *construisent* ».$\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
Ens 9 : Donc voilà j'ai une bande qui correspond à ma bande unité, maintenant…même longueur (Elle prend une bande qu'elle pose sur celle accrochée au tableau) et j'aimerais avec cette bande, obtenir un demi comment puis-je m'y prendre pour obtenir un demi ?euh….Valentin ? Valentin : Tu coupes…(fait des gestes) tu as… **Ens8 :** […] Viens me montrer comment obtenir un demi à partir de cette bande, moi je veux un demi de cette bande **Valentin** : bah..tu peux me la tenir ? bein tu coupes ici (Il montre approximativement le milieu de sa bande) […] **Valentin** : bein, tu mesures **Ens10** : non je ne veux pas mesurer, va t'asseoir ? Non je ne veux pas mesurer. Martin ? **Martin** : Moi je fais comme ça **Ens11** : Tu fais quoi comme geste là **Martin** : bein je plie **Ens12** : Tu plies ? **Martin** : Je plie en deux **Ens13** : <u>Tu plies en deux.</u> Si vous ne me dites pas précisément ce que vous faites, je peux plier comme ça (plie une extrémité) est-ce que j'ai une moitié ? Stacy est ce que je vais obtenir la moitié de ma bande unité ? Donc là je prends ma feuille et je la plie clairement en deux (Elle montre qu'elle superpose les deux extrémités) et là j'obtiens un demi. Maintenant, je prends une autre bande qui est toujours identique à ma bande unité, maintenant je voudrais obtenir des quarts (un quart), -- Emma vient donc nous montrer comment tu vas faire pour obtenir un quart à partir de ma bande unité ? […] **Emma** : et tu la replies en deux **Elève**s : ah non ! **Paul** : Non sinon ça fait des huitièmes ! **Ens14** : Attention…comment on peut vérifier ? **Orlane** : Et bien on déplie **Emma** : Un deux trois quatre -- **Ens15 :** Ça veut dire que dans mon unité tu as combien de quarts ? **Emma :** <u>quatre.</u> **Ens16 :** Montre-moi un quart ? […] --- **Paul** : si elle repliait ça faisait un huitième !

Ens18 : Je voudrais dans ma bande toujours identique à ma bande de départ deux huitièmes, Joël, deux huitièmes ?
Moi, j'aimerais bien que tu viennes réfléchir, comment tu vas essayer de faire deux huitièmes. Là tu as une unité, comment tu vas faire pour obtenir des huitièmes.
Ta bande unité il faut qu'elle soit coupée en combien pour avoir des huitièmes ?
Paul tu te tais ? Tu viens là. Ta bande…il va y avoir combien de huitièmes dans une unité ? Là dans ta bande unité, il y a combien de huitièmes ? Dans ta bande unité il y a combien de quarts ?
Joël : quatre
Ens19 : donc dans ta bande unité il y a combien de huitièmes ?
Joël : huit
Joël plie sa bande, la déplie puis compte le nombre de « morceaux »
[…]

Ens22 (déplie la bande) : ta bande elle est coupée en combien de morceaux ?
Et moi je te demande deux huitièmes ? Montre-moi à quoi correspond deux huitièmes ?
Vas-y montre-moi deux huitièmes ?
Bein réfléchis, là tu as…combien de huitièmes ?
Joël : huit huitièmes
Ens23 : […]
Je prends deux huitièmes, il va me rester combien de huitièmes que je ne vais pas utiliser ?
Elèves : 6
Ens24 : six huitièmes
Martin : donc ça fait un quart
Paul : bein oui depuis tout à l'heure. T'avais pas besoin de reprendre une bande, tu prenais un quart et ça faisait déjà deux huitièmes.

Ens25 (accroche les deux huitièmes) : oui mais moi je veux deux huitièmes.
Voilà deux huitièmes, Joël je te remercie.
Donc là j'ai deux huitièmes, maintenant je reprends de nouveau une bande unité et j'aimerais obtenir trois huitièmes.
Elèves : facile !
Ens26 : Joël2, là c'est la première étape de notre travail, donc là Joël2 va nous…Explique s'il te plait
L'enseignante répète plus fort ce que dit l'élève qu'on n'entend pas.
Ens27 : Il plie en deux, tu obtiens des…..demis
Joël2 : Je plie en deux j'obtiens des quarts, je plie en deux j'obtiens des huitièmes.
Ens28 : Est-ce que c'est bon pour tout le monde ? Caroline ?
Tu obtiens des huitièmes, tu obtiens huit morceaux. Maintenant, tu me montres trois huitièmes

Phase de recherche
Passation de la consigne : un peu plus de 1'.
On souhaite fabriquer une bande de même longueur que la bande de départ en utilisant ces quatre morceaux.
On peut ne pas utiliser tous les morceaux, on peut utiliser plusieurs fois le même morceau. Trouvez au moins quatre façons de procéder.

Consigne dite par Solène :
Ens29 : vous avez une bande unité, des demis, un quart ; deux huitièmes et trois huitièmes. Maintenant, vous allez vous mettre par deux pour faire le travail que je vais vous présenter. Je veux que vous utilisiez ces demis, ces quarts, ces deux huitièmes et ces trois huitièmes en associant plusieurs morceaux. Je veux que vous reconstituiez la bande unité de départ. Il y a plusieurs possibilités**.**
Les élèves s'agitent posent des questions
Ens30 : laissez-moi parler, laissez-moi dire la consigne. En utilisant différents morceaux, je veux que vous reconstituiez la bande unité de départ.

-----------------------------mise en commun--
Ens32 : Plus de la moitié des groupes (de deux) a trouvé. On pause son crayon, Marion, Antonin. On regarde vers moi. On va mettre en commun ce que vous avez trouvé. On va commencer par Yoan qui est tout seul. <u>Donc, une possibilité pour me reconstituer la bande unité avec ces différentes fractions.</u>
Yoan : Tu peux faire deux fois un demi.

Ens33 : Y en a qui l'ont écrit autrement, qui peut me dire ?
Elève : Un demi plus un demi est égale à une unité.
Ens 34 (reprend) : égale deux demis, égale une unité.
[…]

Joël : Un demi plus un quart plus deux huitièmes.
Ens35 : Un demi plus un quart plus deux huitièmes. Bien, je vais la reconstituer (l'enseignante prend les morceaux de bandes représentant des fractions et les met bout à bout à côté de la bande unité).
Elève : En fait un quart et deux huitièmes c'est la même chose ?
Ens36 : Et là est ce que c'est pareil (en comparant bande unité et somme de « *morceaux* » de bandes)
Elève : un dit, maitresse, un quart et un huitième c'est la même chose ?
Ens37 : Effectivement un quart égale deux huitièmes
(Retour à l'ordre en interpellant Flavie) **:** Maintenant on est en mise en commun donc je ne veux plus entendre de bruit.

Joël : On a le droit de prendre une feuille à carreau et donc de faire ça.
Ens38 : Je ne comprends pas ta question, je ne te demande pas de prendre une feuille à carreau, je te demande de trouver des égalités
Joël : inaudible
Ens39 : Non ! C'est une réactivation, donc ça, tu l'as fait l'an passé. Je vous l'ai fait faire en pliant pour obtenir un demi, un quart, deux huitièmes, trois huitièmes. D'accord ? Vous l'avez correctement, cela ne vous a pas posé de problèmes, ça veut dire que vous vous rappelez ce qu'on a fait l'année dernière et vous avez compris comment couper une unité.
[…]
Vous pouvez poser vos crayons et autres matériels qu'on écoute. Tu poses ton crayon Martin, là on est en train de mettre en commun les résultats.

Stacy ?

Ens42 : trois huitièmes plus trois huitièmes plus deux huitièmes égalent huit huitièmes égale 1 unité. Oui Stacy….euh, Nolwenn ?
[…]
Ens44 : deux huitièmes plus deux huitièmes… Égalent quatre fois deux huitièmes égalent huit huitièmes égalent une unité (tout est écrit au fur et à mesure au tableau).

Elève : Après y en a beaucoup, maitresse ?
Ens45 : Y en a beaucoup donc on ne va pas marquer tout. Là, on en trouve.
Ens46 (tout en écrivant au tableau) : trois huitièmes plus trois huitièmes plus un quart, tout à l'heure on a dit que deux huitièmes c'était pareil qu'un quart.

Paul : bein un quart plus un quart plus un quart un quart.
Mouvement dans la classe, les élèves disent « facile »
Ens47 : Facile, mais elle n'était pas encore écrite. Encore ? y en a qui n'ont pas parlé, Joël2 ?
Joël 2 : Un quart plus deux huitièmes plus deux huitièmes plus un quart.
Ens48 : Egalent une unité !

Ens 51: Un demi plus deux huitièmes plus deux huitièmes plus deux huitièmes égalent une unité.
Paul : Yen a encore un paquet
Ens52 : Je ne sais pas s'il y en a encore un paquet, on va voir. Paul ?
Paul : trois huitièmes plus un quart.
Ens53 : trois huitièmes plus un quart égalent une unité. On va s'arrêter là !
Paul : non, non un dernier !
Cela continue encore sur quelques échanges, l'enseignant valide ou non les sommes produites.

Sur le tableau, on distingue la bande unité et les 4 bandes de mesure ¼,2/8,3/8 et 1/8.
Sur le côté de droite, une liste de sommes de fractions égales à un.

Moment d'expositions de connaissances.

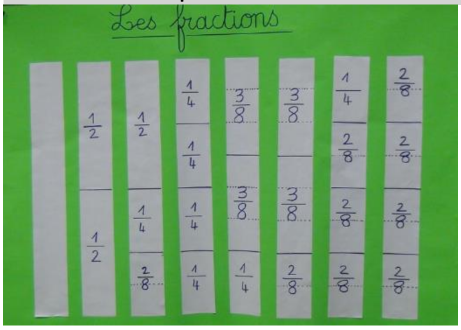
Ens64 : […]L'unité c'est une bande coupée en x morceaux, pour avoir une fraction on prend un certain nombre de parts. D'accord, mais c'est un nombre.
Vous vous rappelez comment on appelle le nombre du haut et le nombre du bas ?
Comment on appelait le nombre en haut et en bas ?
Elèves : Numérateur et dénumérateur
Ens65 : Caroline tu n'écoutes pas !
Elève : C'est dur ça à retenir numérateur et dénumérateur
Martin : bein non, numérateur c'est comme nuage
[…]
Eloise : Pourquoi on rajoute dé devant, ça veut dire dénumérateur

Ens67 : Dénominateur ! Alors le dénominateur ça correspond à quoi, dans le nombre fractionnaire, ça correspond à quoi ?
Joël2 : C'est ce qu'on a en morceaux
Yoan : Combien de morceaux à manger ?
Ens70 : à manger…ça ne se mange pas !
Elève : Tu as faim ?
Ens71 : Regarde mon unité est découpée en combien de morceaux ?
Elèves : Deux

Ens72 : Le dénominateur correspond aux nombres de parts, si l'unité est coupée en deux morceaux et je prends combien de morceaux de mon unité ?
Elèves : La moitié.

Ens 73: Un demi, je prends une seule part d'une unité coupée en deux, là je prends une part d'une unité coupée en quatre, là je prends deux parts d'une unité coupée en huit, et effectivement on observe des correspondances, des égalités. (*En montrant les bandes accrochées au tableau).*
Paul : Le numérateur c'est comme…euh oui comme le régulateur, tu as par exemple deux parts, tu vas réguler ta part on n'en prenant qu'une.
L'enseignant ne réagit pas à la remarque de Paul.

Moment d'Expositions de connaissances (EC3)



Ens74 : Ça c'est l'affichage. On va récapituler un petit peu. Qui est ce qui peut, qu'est-ce qu'il faut retenir aujourd'hui ? Qu'est-ce que vous avez appris ou revu par rapport à l'an passé ? Caroline ?
Caroline : Construire la même unité

Ens75 : C'est-à-dire une unité peut être égale à plusieurs fractions, décomposer, c'est la somme de plusieurs fractions. Donc là, c'est l'unité coupée en deux, coupée en trois…oui

---

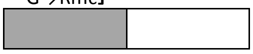
Paul : On peut retenir qu'on peut mélanger des fractions qui n'ont pas le même dénominateur
Ens76 : Oui, Paul, il est en train de dire que pour reconstituer une unité, on peut la reconstituer en faisant une somme de fractions qui n'ont pas nécessairement le même dénominateur

---

Paul : Ni le numérateur
Ens77 : On s'arrête là et la prochaine fois on va poursuivre avec des fractions et des unités

<table>
<tr><td>de longueurs (32’48)</td></tr>
<tr><td>Etat du tableau à la fin de la séance, l’affiche recouvre les bandes blanches utilisées lors de la validation des résultats.</td></tr>
</table>

2.2.2 Reconstitution des EC de la séance et codage :

<table>
<tr><td colspan="2">Une fraction c’est des quarts et des doubles $[EC_{G\rightarrow Rmc}]$
Une fraction c’est un nombre $(EC_{G}]$
Une fraction s’écrit $\frac{1}{4}$ et non $\frac{1}{4}$. $[EC_{G\rightarrow Rmc}]$
$\frac{1}{2}$ est une fraction $[EC_{rmc\rightarrow G}]$
Une fraction peut se représenter $[EC_{G\rightarrow Rmc}]$

Pour obtenir des $\frac{1}{2}$ unités, il faut plier la bande en deux (les deux extrémités doivent se toucher). (énoncé d’une méthode permettant d’obtenir deux moitiés)
La bande s’appelle la bande unité. (définition)
Dans une unité il y a 4 quarts. $[EC_{G}]$
Un quart ça se voit sur une bande pliée deux fois. $[EC_{G\rightarrow Rmc}]$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}$ c’est $\frac{2}{8}$
$1=2\text{x}\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$</td><td>$\frac{1}{2}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$
$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=1$ (c’est faux non relevé par l’enseignante)

$\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$
$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{8}{8}=1$

$\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=4\text{x}\frac{2}{8}=1$
$[EC_{G}]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">L’unité c’est une bande coupée en x morceaux $[EC_{G\rightarrow rmc}]$.Pour avoir une fraction on prend un certain nombre de parts. C’est un nombre $[EC_{G}]$
Le nombre du haut s’appelle le numérateur $[EC_{G}]$
Le nombre du bas le dénominateur $[EC_{G}.]$
Le dénominateur correspond aux nombres de parts $[EC_{G\rightarrow rmc}]$
La moitié c’est une unité coupée en deux $[EC_{G\rightarrow rmc}]$
Il y a des égalités, des correspondances entre les fractions (voir affichage ainsi que les égalités produites au tableau) : Les EC sont des exemples trouvés à la suite de la recherche.
Une unité peut être égale à plusieurs fractions $[EC_{G}]$, décomposer c’est la somme des</td></tr>
</table>

fractions (définition assez générale du sens donné à « *décomposer* »). On peut faire une somme de fractions dont les dénominateurs sont différents [EC_G]

2.3 Analyses des données de la séance 1 : année (2).

2.3.1 Analyse de la phase de rappel liaison :

Cette phase de rappel a pour objectif de mobiliser des connaissances datant de l'année précédente. Les connaissances remobilisées sont celles liées à l'écriture et à la lecture des fractions. Dans cette phase, notamment pour l'élève provenant d'une autre école, elle justifie de la programmation particulière de l'école. Solène interpelle soit Joël (le nouvel élève en difficulté) soit Sinaï (l'enfant du voyage).

Ens7 : *s'adressant à Joël* (élève redoublant son CM2 , cet élève vient d'une autre école)
Oui tu les as vues en CM1, nous, c'est un choix on les voit en CM2, on installe autre chose correctement avant d'aborder cette notion-là, on voit les fractions en cm1 pour aller vers les décimaux en cm2. L'an passé on a terminé très tard là-dessus. Donc je reprends ça aujourd'hui, comme ça, je vois où tu en es et où en est Martin. D'accord ?

La liaison que Solène effectue est entre les séances vues l'année précédente et cette année. C'était sa collègue qui avait installé les fractions. Solène connait le déroulement et les tâches que les élèves ont effectuées. La première question pour engager la réflexion est : « *c'est quoi une fraction ?* », les élèves répondent par des exemples « *des quarts, des doubles* », L'enseignante enchaine, validant ainsi la réponse, puis elle demande comment on les écrit.
L'enseignante, visiblement, essaie simplement de remobiliser des connaissances très locales. Solène conclut cette partie par une EC_{G} : les fractions ce sont des nombres. La montée en généralité a été très rapide : deux exemples (un quart et un demi) puis une conclusion : « *ce sont des nombres* ». Cette réponse n'est absolument pas présente dans les réponses des élèves.

2.3.2 Analyse de la phase de rappel provoquée

Cette phase est la même que celle de l'année précédente pour les CM2. L'enseignante, interpelle collectivement les élèves et leur demande, de plier des bandes de manière à faire apparaitre des demis, des quarts ou des huitièmes de la même bande (bande de référence)
Les élèves sont à l'aise avec les pliages des bandes, Joël un peu moins, l'enseignante l'appelle au tableau et lui fait faire les pliages pour obtenir des huitièmes. En revanche, elle va très vite et dit que huit huitièmes c'est une bande unité sans dire que cette bande vaut « 1 » et sans écrire d'égalités au tableau.
Nous notons une montée en généralité et un jeu de langage (de l'action vers une certaine généralité). Solène rappelle que plier en deux équivaut à prendre la moitié d'une bande ou encore une demi-unité :

ENS13 : Donc là je prends ma feuille et je la plie clairement en deux [EC_{rmc}]. (Elle montre qu'elle superpose les deux extrémités) et là j'obtiens un demi. [EC_G]

Elle poursuit en expliquant que 4 morceaux ce sont des quatre quarts et quatre quarts c'est une unité. Le même raisonnement se poursuit sur les huitièmes. Pour conclure, elle inverse l'ordre part du plus général vers l'exemple contextualisé :

Ens 28 : Tu obtiens des huitièmes [EC_G], tu obtiens huit morceaux [EC_{rmc}]. Maintenant, tu me montres trois huitièmes ?

Elle ne revient pas sur la lecture des fractions qui semble ne pas poser de difficultés aux élèves interrogés.

2.3.3 Analyse des éléments des EC après la mise en commun.

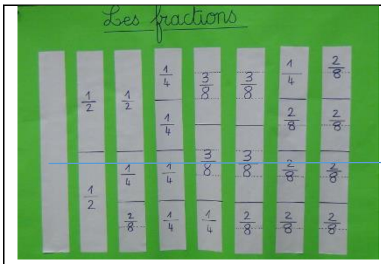
Solène obtient différentes égalités comme l'année passée. Ce qui est modifié, ce sont les modalités de validation. Contrairement à l'année précédente, Solène ne valide pas en usant du matériel mais en écrivant des listes de sommes suivant ainsi les recommandations du ERMEL. Solène n'indique pas que ces sommes valent 1, elle valide une seule fois les propositions de somme avec le matériel :

Ens37 : Effectivement un quart égale deux huitièmes. [EC_G]

Après cette activité, l'enseignante enchaine sur un temps d'exposition de connaissances qui reprend le texte écrit de l'année précédente et peut- être ainsi considéré comme une phase de rappel. Elle rappelle que les fractions sont des nombres et demande aux élèves comment s'appellent les nombres du haut et du bas.
Les élèves ont eu la trace écrite l'année précédente, ils essaient de se souvenir des mots « *dénominateur* » et « *numérateur* ». Martin qui n'était pas dans ce groupe classe raconte une histoire de « *nuage* » et de numérateur montrant ainsi que les souvenirs sur lesquels il s'appuie ne sont pas les mêmes. De même Joël essaie d'expliquer ce qu'il a vu sur les fractions avec des quadrillages, mais Solène ne comprend pas. En revanche ceux de la classe, évoquent des histoires de …gâteaux…à manger en entier.
Ces exemples peuvent paraitre anecdotiques, nous y voyons l'expression de la visibilité de la mémoire didactique de cette classe. Cette dernière ne s'appuie pas seulement sur les mathématiques apprises mais aussi sur les autres éléments du milieu non nécessairement mathématiques.
Solène sait sûrement cela, tout du moins au niveau de ses routines de langage, car de nouveau elle utilise les mots « *parts* », « *morceaux* », « *coupé* ».

2.3.4 Analyse de l'EC affichée.

Solène accroche au tableau une affiche, directement inspirée de ce que propose l'ouvrage ERMEL. On y voit plusieurs décompositions de l'unité….l'unité 1 est suggérée par la bande.

	Cette bande unité, blanche représente 1. L'affichage permet de comparer plusieurs bandes qui valent 1 et de se représenter visuellement l'équivalence et/ou l'égalité des

	fractions.

2.4 ***Analyse a posteriori.***

2.4.1 *Un déroulement proche des recommandations de la ressource.*

Le groupe classe a pu produire les différentes décompositions de 1 attendues. En revanche, Solène laisse planer un doute sur la possibilité de trouver d'autres décompositions compte tenu des contraintes de l'énoncé.
Compte tenu des réussites des élèves, les EC produites apparaissent très ancrées dans le contexte, la phrase de conclusion « *On peut faire une somme de fractions dont les dénominateurs sont différents*(EC_G) » exprime clairement la possibilité d'additionner toutes les fractions entre elles sans dire explicitement que les connaissances de primaire ne permettent pas de le faire.
Solène énonce explicitement ce qu'il y avait à retenir « *c'est-à-dire une unité peut être égale à plusieurs fractions, décomposer, c'est la somme de plusieurs fractions* ». L'enseignante s'appuie sur tout ce que propose la ressource (affichage, consigne, indication de gestion) et grâce à l'intervention des élèves va même un peu au-delà. En effet la phrase de conclusion ne correspond pas à un objectif de la ressource.
Dans le paragraphe 1.4.1, nous faisions remarquer que l'écriture de l'unité comme le nombre 1 n'était pas explicite, dans les EC de Solène ce n'est pas toujours explicite.
Sauf pour trois exemples :
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1$, $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = 4 \times \frac{2}{8} = 1$
Pour conclure, Solène utilise tous les points d'appuis de la ressource et improvise lorsqu'elle est moins outillée. Elle laisse croire aux élèves qu'il y a d'autres combinaisons de sommes des fractions données (alors que tous les cas sont au tableau). Solène n'a pas cherché tous les cas possibles, la ressource ne les présente pas ce qui semble ne pas avoir d'intérêt. Nous comprenons mieux alors la difficulté qu'elle avait à gérer les interventions de Paul qui voulait s'assurer que tous les cas étaient traités. Solène, lors de sa préparation a soigné la préparation matérielle, la gestion de la classe, elle ne s'est pas centrée sur la réalisation de l'activité de l'élève (qui leur est vraiment dévoluée).

2.4.2 *Prise en compte des interventions des élèves et leurs effets.*

Caroline qui est une élève en difficulté exprime qu'elle a appris à « *construire la même unité* », montrant qu'elle a dû comprendre que l'unité pouvait s'écrire sous la forme de plusieurs sommes de fractions de l'unité. Paul dépasse les attendus de l'enseignante et déclare « *On peut retenir qu'on peut mélanger des fractions qui n'ont pas le même dénominateur* » ce qui correspond effectivement à ce qui est nouveau dans cette activité. Il ajoute que les numérateurs sont différents aussi. Solène reprend la remarque au sujet des dénominateurs mais pas des numérateurs.
Solène met l'accent sur la construction de l'unité et sur le sens du mot « *décomposer* » « *C'est-à-dire une unité peut être égale à plusieurs fractions, décomposer, c'est la somme de plusieurs fractions. Donc là, c'est l'unité coupée en deux, coupée en trois…oui* ». Cette phrase de Solène montre bien les tensions auxquelles elle se soumet : donner des définitions les plus formelles possibles et utiliser le langage du registre de l'action pour s'assurer que les

liens soit fait. D’autres tensions s’expriment entre : prendre en compte les apports des élèves mais aussi se limiter aux indications de la ressource.
Ces EC sont toutes produites en interactions avec les élèves, ce qui nous fait penser que l’institutionnalisation leur est en partie dévolue. Nous pouvons aussi analyser cela comme un moyen pour le professeur d’enrôler ses élèves et de capter ainsi leur attention. Pour autant, l’enseignante conduit sa classe de manière à faire émerger plusieurs EC. Lors de la recherche, elle se met en retrait mais reprend vraiment un rôle lors des mises en commun, phase de synthèse et d’EC. Pour cette séance, nous pouvons souligner la part assez importante d’exposition de connaissances ayant un certain degré de généralité. D’autres EC articulent EC_G et des expositions de connaissances énoncées dans le contexte particulier de l’utilisation des bandes. Pour cette séance il y a autant d’EC isolées que d’ EC descendantes (d’un certain degré de généralité vers l’exemple).
Les EC produites sont réalisées en interaction entre le professeur et les élèves. C’est pourquoi nous les qualifions <u>d’EC discutées</u> au sens où elles apparaissent suite à une discussion dans laquelle l’enseignant choisit de proposer ou pas tels mots de vocabulaire, telles définitions.
Enfin, nous remarquons que dans les égalités produites n’apparait pas de référence à la bande unité u. Les égalités proposent des EC générales dans le sens où $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$ est toujours vrai quel que soit le contexte de référence.

2.5 <u>*Analyse a priori de l’activité du manuel : activité C*</u>

Cette partie est extraite du manuel Cap Math Cm1 (p77-78).Pour la ressource cette situation correspond à une recherche dont l’objectif annoncé est : exprimer des longueurs non entières (introduction des fractions). Solène détourne l’objectif et la situation devient un exercice de réinvestissement, les élèves sachant écrire les fractions usuelles.
La séance consiste à relire dans un premier temps la trace écrite distribuée l’année passée. Cette lecture arrive en deuxième intention du projet global de Solène. Elle a d’abord choisi de mettre les élèves en activité (séance1) et de remobiliser l’usage du vocabulaire associé aux fractions et certaines égalités puis elle revient sur le texte écrit. Cela montre que ce qui semble être au centre des pratiques de cette enseignante est la mise en activité des élèves pour en déduire des EC.

<u>Eléments du déroulement et objectifs a priori.</u>

La tâche choisie consiste, en utilisant une bande de référence à tracer plusieurs segments dont les mesures sont comprises entre deux entiers consécutifs. La bande unité est notée u.
L’exercice est individuel alors que le guide du maître proposait un autre scénario.(scénario des messages)
Dans un premier temps Solène prévoit de demander aux élèves de tracer des segments compris entre 1u et 2u à l’aide de la bande unité. C’est une occasion pour elle d’instrumentaliser la bande comme un instrument de mesure.
Le guide du maître du Cap Math CM1 (p150) propose cette tâche comme une recherche permettant d’exprimer des longueurs non entières. D’après le guide du maître, l’accent est mis sur les équivalences d’écritures comme $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ mises en évidence grâce au pliage.

Cette séance articule le passage de l'usage des bandes vers une représentation symbolique possible (les segments) pour atteindre une représentation dans le registre numérique.

Cette bande dite unité peut être représentée

$\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{4}$

Puis $\frac{3}{8}u+\frac{3}{8}\ u+\frac{1}{4}u$=1u pour aller vers l'égalité hors contexte $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=1$

Ce ne sont pas là les objectifs du manuel, cela nous semble être ceux de Solène.
La première tâche effectuée, Solène propose de « *construire quatre bandes dont les longueurs doivent être comprises entre 2 u et 3u, exprime ces longueurs avec l'unité u, en utilisant des fractions.* »

<u>Des contraintes dans le choix des fractions liées au matériel.</u>

À ce stade de la programmation de Solène, les élèves savent plier une bande pour obtenir des demis, des quarts voire des huitièmes, ils savent également coder ces pliages. Ils ne connaissent pas nécessairement les gestes pour produire d'autres fractions de l'unité (comme les tiers ou les sixièmes). La bande n'est pas suffisamment longue pour produire facilement par pliage des fractions de l'unité au-delà du huitième. Les élèves poursuivent leur découverte des fractions avec des fractions dont les dénominateurs sont 2,4,8. De nouveau les aspects des fractions sollicités sont « *partie d'un tout* » et l'aspect « *mesure* ».
Les élèves peuvent produire 8 segments de mesures différentes (et 14 écritures) :
<u>Pour la première tâche</u> : construis un segment compris entre 1u et 2u :
1u+$\frac{1}{2}$; 1u+$\frac{1}{4}$ u; 1u+$\frac{2}{4}$ u; 1u+$\frac{3}{4}$ u; 1u+$\frac{1}{8}$ u; 1u+$\frac{2}{8}$ u; 1u+$\frac{3}{8}$u ; 1u+$\frac{4}{8}$u ; 1u+$\frac{5}{8}$ u; 1u+$\frac{6}{8}$u ; 1u+$\frac{7}{8}$u ; 1u+$\frac{8}{8}$u ; 1u+$\frac{2}{2}$u ; 1u+$\frac{4}{4}$ u
<u>Et pour la deuxième tâche</u> : construis quatre segments compris entre 2u et 3u :
2u+$\frac{1}{2}$ u; 2u+$\frac{1}{4}$ u; 2u+$\frac{2}{4}$u ; 2u+$\frac{3}{4}$ u; 2u+$\frac{1}{8}$u ; 2u+$\frac{2}{8}$ u; 2u+$\frac{3}{8}u$; 2u+$\frac{4}{8}$ u; 2u+$\frac{5}{8}$ u; 2u+$\frac{6}{8}$u ; 2u+$\frac{7}{8}$ u; 2u+$\frac{8}{8}$ u; 2u+$\frac{2}{2}$u ; 2u+$\frac{4}{4}$ u
La consigne n'explicite pas si les mesures des segments sont strictement comprises, c'est pourquoi nous gardons possible des mesures comme 2u+$\frac{4}{4}$ u au lieu de 3u.
Puis établis les égalités suivantes :
2u+$\frac{2}{4}$ u= 2u+$\frac{4}{8}$ u
2u+$\frac{3}{4}$ u=2u+$\frac{6}{8}$ u
2u+$\frac{1}{4}$ u= 2u+$\frac{2}{8}$u

$2u+\frac{4}{8}$ u=$2u+\frac{1}{2}$ u=$2u+\frac{2}{4}$ u

Et en déduire que $\frac{2}{4}$ u=$\frac{1}{2}$ u= $\frac{4}{8}u$; $\frac{3}{4}$ u= $\frac{6}{8}$ u; $\frac{1}{4}$ u=$\frac{2}{8}$ u; $\frac{8}{8}$ u= $\frac{2}{2}$u = $\frac{4}{4}$ u=1 u

Solène propose trois années de suite cet exercice. Il permet d'établir des équivalences au-delà de deux couples de fractions : $\frac{2}{4}$ u=$\frac{1}{2}$ u= $\frac{4}{8}$ u.

Nous voyons dans ces exercices les potentialités d'EC suivantes :

- il y a plusieurs écritures possibles de la même mesure.
- lorsque le numérateur et le dénominateur ont la même valeur la fraction est égale à une unité.

Est-il possible de généraliser ces égalités de mesure afin d'en établir des généralités sur les équivalences d'écriture de nombres ? Ou encore est-il si « *naturel* » de conclure que les « *symboles* » pour coder des segments sont aussi des nombres ?

2.6 Tableau des épisodes de la séance 2 de l'année (2).

2.6.1 Tableau des EC séance C + EC_1+ EC_2+ EC_3

Le tableau des épisodes est découpé en 4 épisodes :

-phase de rappel/ liaison (environ 4 minutes)
-temps d'EC en proposant une lecture commentée des EC écrites (environ 18 minutes).
-Phase de recherche.(environ 13 minutes)
-mise en commun (2 minutes)
-conclusion (moins d'une minute)
Cette séance est relativement courte.

2.6.2 Reconstitution des EC de la séance et codage :

Les fractions c'est une bande qui s'appelle la bande unité, c'est une bande de référence. [$EC_{rmc}\rightarrow EC_G$]. Un et demi et un demi ce sont des choses différentes. Un demi a une écriture fractionnaire, il s'écrit $\frac{1}{2}$. [EC_G] Le 1 dans $\frac{1}{2}$ c'est le nombre de parts que tu vas reporter. Le dénominateur c'est le nombre de parts, c'est la bande en entier. [EC_{rmc}]
Pour avoir 4 parts égales, il faut plier deux fois la bande. [$EC_G\rightarrow EC_{rmc}$] Dans $\frac{3}{4}$ le numérateur c'est le nombre de parts qui va être reporté trois fois. [$EC_{rmc}\rightarrow EC_G$] Les fractions que l'on rencontre souvent c'est : un demi, un quart, un tiers, trois quarts [EC_G] Un gâteau coupé en 2 parts égales, une de ses parts vaut la moitié, un demi.[$EC_{NC}\rightarrow EC_G$]. Un quatre-quarts (le gâteau) c'est 4 fois une part et quatre quarts c'est le gâteau entier. [EC_{NC}] Un quart d'heure c'est 15 minutes [EC_G] . C'est une heure coupée en 4 morceaux et tu en prends un morceau.([$EC_G \rightarrow EC_{NC}$] Un tiers du temps, c'est l'unité partagée en trois parts. [$EC_{NC}\rightarrow EC_G$] Un tiers c'est trois parts. [$EC_G\rightarrow EC_{rmc}$]

Trois quarts d'heures c'est 45 minutes, l'heure est coupée en 4 morceaux. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]

Les fractions servent pour de nombreux calculs. [EC_G]

Un demi c'est aussi la moitié d'une bande. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]

Un est égal à un demi plus un demi. [EC_G]

Un quart c'est la moitié de la moitié. [EC_G]

Un c'est un quart plus un quart plus un quart plus un quart. [EC_G]

Un tiers c'est 1 séparé en 3 [EC_G].

(Un tiers et un tiers c'est un sixième dit par une élève, repris par l'enseignante pour correction).

Un tiers et un tiers c'est deux tiers. [EC_G]

Trois tiers est égal à une unité, tu coupes ton unité en trois parts égales. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]

Trois quarts d'une unité [EC_{rmc}] sont égaux à trois fois un quart [EC_G], trois quarts plus un quart vaut un 1. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$].

____________________EC produites à l'issue de la recherche________________________

Deux unités c'est deux bandes. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]

Une unité plus un demi de u et une unité plus un quart de u sont des longueurs comprises entre une unité et deux unités. [EC_G]

Entre deux unités et trois unités on peut trouver deux unités plus un demi de u, deux unités plus un quart de u, deux unités plus un huitième de u. [EC_G]

Reporter des bandes unités permet de tracer des mesures des segments entre deux unités, ici entre deux et trois. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$].

Nous comptabilisons 7 assertions descendantes (du général à l'exemple), mais non commentées, 4 ou 5 ascendantes (de l'exemple vers du général), 10 générales isolées, et 2 autres. Ces EC sont discutées et diffuses, elles ne sont pas nécessairement repérables en tant que telles. L'enseignante évoque le matériel, montre les gestes, explicite les procédures et ne s'attarde pas sur ces définitions improvisées.

2.7 Analyse des données séance 2 : année (2).

Nous avons ainsi découpé les transcriptions en épisodes en retirant toutes les interactions qui ne servaient pas nécessairement l'étude des EC. Dans nos annexes, nous faisons figurer les transcriptions et nous soulignons ce qui correspond aux EC. Nous avons fait ce choix car transcriptions et tableaux des épisodes faisaient un peu doublon dans les annexes. Dans le corps du texte nous faisons apparaitre les analyses et des éléments des transcriptions significatifs.

2.7.1 Analyse des EC lors de la phase de rappel.

Transcription 4 : annexe p 24.

Ens 1 : Qu'est-ce qu'on a fait hier ?

Tu te rappelles les fractions car hier tu n'étais pas là ?

Là tu vois c'est une bande qui s'appelle la bande unité, c'est la bande de référence.

Une des caractéristiques de Solène c'est de partir d'une généralité : les fractions et immédiatement de proposer une **recontextualisation de type RMC (même contexte)** en rappelant le matériel utilisé : « *la bande unité qui est aussi la bande de référence* ».

Cette phase semble servir à mobiliser l'évocation de la séance précédente et l'usage du matériel utilisé.
La phase de rappel permet de rappeler les éléments qui constituent l'écriture fractionnaire sans que Solène n'utilise les mots dénominateur et numérateur. Le numérateur y est défini comme le nombre de parts à reporter alors que le numérateur correspond au nombre de parts de la fraction de l'unité choisie. Elle dit : « *Ça, c'est le nombre de parts (elle désigne le dénominateur) et le 1 c'est la part qui va être reportée* ».
Remarque :
Dans $\frac{1}{2}$, ce n'est pas le 1 qui est reporté mais la fraction de l'unité : $\frac{1}{2}$ est reportée une fois, dans $\frac{3}{2}$ la fraction $\frac{1}{2}$ est reportée 3 fois.

2.7.2 Analyse des EC lors de la lecture commentée de la leçon écrite.

Cette partie dure 18 minutes, l'enseignante lit et s'interrompt très souvent pour impliquer les élèves dans cette phase d'exposition de connaissances. Les EC_G sont plus nombreuses par rapport aux $EC_{Rmc.}$ Cette phase d'expositions de connaissances permet de rappeler de nombreuses égalités : « *Un c'est un quart plus un quart plus un quart plus un quart.* »
Nous retrouvons les caractéristiques mises en évidence lors de la séance 1 : des EC discutées, remises en scène en rappelant le contexte d'introduction ou mises en scène dans de nouveaux contextes.
Après la lecture de la définition écrite, elle en propose une reformulation :

ENS15 : « Le numérateur c'est le nombre de parts qui va être reporté et le dénominateur c'est votre bande unité qui va être composée de 4 parts égales »

Ces deux « *définitions* » du numérateur et du dénominateur montrent un « *brouillage* » entre un énoncé qui tend vers une généralité « *Le numérateur c'est le nombre de parts* » et l'évocation du matériel « *Le dénominateur c'est votre bande unité* ». Le dénominateur d'une fraction n'est pas une bande unité. L'intention de l'enseignante est louable, elle tente de faire les liens, rapidement, entre ce qui relève du matériel et/ou de l'action avec les définitions plus formelles. Pour autant, le raccourci « *Le dénominateur est une bande unité.* » n'apporte pas nécessairement d'éclaircissement, d'autant plus que dans les séances proposées la bande unité vaut 1. Dans le contexte, le dénominateur serait le nombre des parts égales d'une unité. De plus dans la phase de rappel, Solène précise que la bande unité c'est une bande référence et qu'une fraction est une part de cette bande. Comment alors faire le lien avec cette définition « *improvisée* » du dénominateur ?
Solène sollicite ses élèves pour qu'ils énoncent les noms des fractions qu'ils connaissent puis lit le passage comportant plusieurs expressions. Solène va commenter chacune de ces expressions et établir à l'oral des « *conversions* » : $\frac{3}{4}$ d'heure c'est 45 minutes. Solène passe de l'usage d'un mot à un autre : « Un*e demi-heure, c'est quoi ? C'est la moitié d'une heure. ».*
Pour expliquer ces conversions elle explique en montrant l'horloge ronde de la classe, que la moitié de l'horloge (donc d'une aire) correspond à une demi-heure donc à 30 minutes. Son explication conduit à utiliser l'aspect opérateur des fractions ($\frac{1}{2}$ appliqué à 60 minutes).

Puis elle explique ce qu'est un quatre-quarts et dit « *Oui y a quatre parts et tu prends ….tu vas reporter quatre fois une part, et quatre quarts, en fait tu prends tout le gâteau*[64]. ». Pour finir cette partie, elle écrit et formule à l'oral certaines égalités comme : « *Trois quarts, trois quarts, c'est trois fois un quart (EC_G). C'est une part reportée trois fois (EC_{Rmc}), une part égale bien sûr !* » . Elle rappelle que les « *parts* » sont égales, et cette fois-ci la part c'est bien la fraction de l'unité et non le numérateur dont elle parle.
Lors de la lecture de cette trace elle pose de nombreuses questions dont les réponses sont souvent dans le texte. C'est un moyen de gestion qui lui garantit la paix scolaire.
Nous retrouvons aussi des erreurs, des imprécisions dans ce qui est dit à chaud.

2.7.3 Analyse des EC lors de la phase de recherche.

La tâche qui est de « *tracer plusieurs segments dont la mesure est comprise entre 1u et 2u* » est une tâche qu'elle ne propose que cette année-là. Nous supposons qu'elle a pour fonction de remobiliser des connaissances sur les fractions mais aussi de faire le lien avec l'utilisation d'une bande comme gabarit pour tracer des segments. Solène envoie des élèves au tableau pour remontrer comment faire les pliages et à quelle fraction de l'unité correspond chaque bande séparée par une pliure. Solène insiste à ces moments-là pour montrer que 1 c'est la bande unité.

ENS 65: Mais non, je vais vous donner une bande unité.
(Écrit la consigne au tableau). Ça veut dire quoi deux unités Camille ?
Camille : Deux bandes ?

Lors de cette phase, elle est amenée à expliquer ce que signifie reporter, elle le définit ainsi tout en effectuant les gestes au tableau : « *Reporter, ça veut dire je prends la moitié (je la plie en deux), donc là c'est des demis, je la prends et je la remets ici, c'est ça reporter le nombre de parts que tu vas faire, si tu plies en deux, tu as deux parts, et tu prends une part.* » Cet exemple est assez emblématique de ce que doit gérer à chaud Solène, elle ne peut définir reporter mais montre les gestes à accomplir. Un élève se trompe et ne juxtapose pas les deux segments tracés à l'aide du gabarit. (Bande unité). Solène montre aussi une instrumentation de cette bande (En la pliant en deux, elle obtient la possibilité d'utiliser une autre mesure : 1/2u). Elle fait un lien entre la définition erronée du numérateur et ce que signifie reporter « *c'est ça reporter le nombre de parts que tu vas faire, si tu plies en deux, tu as deux parts, et tu prends une part.* ». Le discours peut paraitre incohérent, malgré cela les élèves ne sont pas longtemps en difficulté (Plusieurs demandes de reformulation sont faites), Solène refait au tableau les gestes. Solène se déplace auprès des 3 élèves qui n'ont toujours pas compris. Il y a peu d'EC produites dans cette phase et elles sont plutôt d'ordre « *instrumental* » et de méthode.

2.7.4 Analyse des EC lors de la mise en commun

Lors de la mise en commun tous les élèves ont réussi à tracer 3 segments dont la mesure est comprise entre 2u et 3u.

[64] Cette définition du quatre-quarts est erronée. Le quatre-quarts est un gâteau breton dont les 4 ingrédients suivants sont en proportion égale (beurre, farine, œuf, sucre).

Les différentes mesures sont écrites au tableau et comparées :
$2u+\frac{1}{2}$ u; $2u+\frac{1}{4}$ u; $2u+\frac{3}{4}$ u; $2u+\frac{1}{8}u$; $2u+\frac{2}{8}$ u; $2u+\frac{3}{8}u$.
Il est établi que : $\frac{1}{4}$ u=$\frac{2}{8}$ u
Les EC produites sont moins importantes : toutes les solutions ne sont pas exposées et seulement une équivalence contre 4 possibles. Les deux EC_G produites ont un faible degré de décontextualisation –utilisation de l'unité en référence à la bande – et de généralisation « *Entre deux unités et trois unités on peut trouver deux unités plus un demi de u, deux unités plus un quart de u, deux unités plus un huitièmes de u.* ». Que suggère le « *on peut trouver* », est ce généralisable ou seulement un exemple d'une existence ?

2.7.5 Analyse de la phase de conclusion

Solène demande à ses élèves ce qu'ils ont appris aujourd'hui, ces derniers répondent :

Eloïse : On a appris à faire des bandes entre un certain nombre d'unités.
Ens105 : Oui, on a appris à reporter des bandes unités de manière à …tracer des mesures des segments entre deux unités, ici entre deux et trois unités en l'occurrence.

L'élève interrogé reste au niveau de l'action « *appris à faire* » en essayant d'utiliser le vocabulaire entendu « *bande et unités* ».
L'enseignante reformule tout d'abord de manière assez générale mais liée à l'action « *à reporter des bandes unités de manière à tracer des mesures de segments* [65]» pour terminer en recontextualisant d'après les contraintes de l'exercice « *entre deux unités, ici entre deux et trois unités en l'occurrence* ». Avant cette conclusion, un élève fait remarquer qu'il pourrait prendre des tiers mais il ne sait plus plier la bande pour faire apparaitre les tiers.
L'exercice a pour ambition de montrer qu'entre deux entiers consécutifs il existe d'autres nombres. Mais cela n'est jamais dit et reste assez implicite.

2.8 Analyse a posteriori et synthèse.

2.8.1 Un déroulement et des objectifs qui s'éloignent de celui de la ressource.

Solène utilise Cap Math CM1 comme banque d'exercices. Pour l'ouvrage, les situations proposées sont des recherches qui permettent de découvrir l'écriture des fractions. Solène détourne l'objectif pour montrer à ses élèves qu'entre deux entiers consécutifs on peut trouver et mesurer des segments en utilisant ce qu'ils savent sur les fractions. Elle insiste sur l'instrumentalisation[66] de la bande.
À l'issue de la mise en commun toutes les égalités et équivalences de fractions ne sont pas données.
Les EC reprennent quelques mesures comprises entre 2u et 3u et reviennent sur ce que signifie « *reporter une unité* ». Ce qui semble avoir été le plus révélateur dans cette séance pour les élèves c'est de comprendre que l'unité (représentée par une bande) vaut un. Les

[65] *Notons l'imprécision du langage : on ne trace pas des mesures de segments mais plutôt on trace des segments de mesure donnée.*

[66] *Rabardel montre que ces genèses instrumentales apparaissent aux deux pôles de l'entité instrumentale – artefact et schèmes d'utilisation – et présentent deux dimensions : l'instrumentation — orientée vers le sujet — et l'instrumentalisation – orientée vers l'artefact. http://www.adjectif.net/spip/spip.php?article202.*

connaissances en acte que nous relevons sont : reporter la bande en la juxtaposant, passer de la bande au segment, passer du codage du pliage à la mesure d'un segment. L'enseignante s'appuie sur l'affiche réalisée la séance précédente. Ces EC écrites sur un support affiche participent à faire le lien bien plus que la leçon collée dans le cahier.

	Sur feuille verte : affichage. Sur le tableau des égalités produites par les élèves : Par exemple $2u+\frac{1}{2}u$; $2u+\frac{3}{4}u$

Les EC produites dans cette séance sont des EC déjà exposées (lecture de la leçon de l'année passée et affiche). Les EC produites après la recherche sont assez pauvres et contextualisées. Les grandes étapes du déroulement sont identiques à ceux de la séance 1 mais le contenu est moins nouveau. Cette séance semble destinée à l'apprentissage des mots de vocabulaire mais aussi à l'intégration des représentations et des usages différents des fractions. Dans cette séance, Solène utilise assez peu les mots « *parts* » et « *plier* », elle insiste surtout sur la mesure des segments. Elle ignore presque les équivalences entre les fractions.

2.8.2 Des EC discutées prévues et improvisées.

La pratique de Solène se caractérise par une prise en compte de la parole des élèves. Elle les sollicite, les interpelle si bien qu'il n'y a pas dans cet exemple de monologue de plus de quelques minutes. Le texte qui est lu et commenté a été écrit en 2010, Solène interpelle les élèves sur chaque mot, chaque signe et leur pose des questions. Cette modalité de gestion induit des proximités discursives, l'enseignante reprend les mots des élèves et réciproquement. Les élèves parfois essaient de généraliser pour répondre à la question « *Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?* » et c'est l'enseignante qui recontextualise, réévoque le matériel ou les actions. Cette séance est composée d'une part d'expositions de connaissances non improvisées dans le sens où le texte a été écrit et d'autre part d'expositions de connaissances plus improvisées. L'intention d'institutionnaliser (dans le sens de décontextualiser et dépersonnaliser) est présente mais non aboutie. Nous comptabilisons au moins 15 assertions ayant un degré de généralité mais n'évoquant plus directement le matériel : « *Entre deux unités et trois unités on peut trouver deux unités plus un demi de u, deux unités plus un quart de u, deux unités plus un huitième de u* ».
L'utilisation de cette unité est un pas vers une montée en généralité sans toutefois être générale : « *Une unité plus un demi de u et une unité plus un quart de u sont des longueurs comprises entre une unité et deux unités. (ECG)* ». Pour être général il faudrait dire « *un plus un demi sont compris entre 1 et 2* » et d'écrire $1<1+\frac{1}{2}<2$.

À plusieurs reprises Solène produit, des définitions provisoires ou erronées (le plus souvent à l'oral), nous pourrions en conclure à une faible « *vigilance didactique* » : le côté mathématique apparaissant parfois peu assuré. Nous ne pensons pas qu'il faille conclure si hâtivement. Réagir à chaud, improviser, prendre en compte les paroles des élèves, assurer la paix sociale, et enfin établir les liens entre langage verbal, le symbolisme mathématique et l'usage du matériel (des actions et des gestes matériels) est extrêmement complexe même pour une enseignante expérimentée. Solène s'assure d'un contenu didactique robuste en utilisant des ressources conseillées, mais elle doit s'en écarter pour les raisons évoquées (chapitre 4).C'est souvent dans ces réactions à chaud que l'on note les imprécisions (la définition du quatre-quarts, du numérateur et du dénominateur).
Elle ne peut pas s'appuyer sur des conseils ou des formulations trouvées dans les ressources pour les EC produites à l'oral. Faisons l'hypothèse que ces conseils et formulations existent, il faudrait alors penser l'ergonomie de la ressource et croire que l'enseignante après les avoir lues ou retranscrites dans ses préparations puisse les utiliser à chaud.

2.9 Analyse a priori de la séance 3 : activité G.

Cette séance extraite du Cap Math CM1 a pour objectif de faire tracer des segments de longueur donnée à partir d'un gabarit et d'établir des égalités comme $\frac{3}{2}$u= 1u+$\frac{1}{2}$u.
L'objectif annoncé dans le guide du maître p154 est : exprimer des longueurs non entières (introduction des fractions), reconnaitre quelques fractions égales. Dans la programmation du manuel, cette séance est la quatrième. Cette séance dans le projet de Solène est la troisième mais fait suite à trois séances réalisées en CM1.

Trace les segments dont les longueurs sont données dans ce tableau :

C	D	E	F	G
2u+$\frac{1}{2}$u.	1u+$\frac{3}{4}$u.	$\frac{3}{8}$ u	$\frac{5}{2}$ u	1u+$\frac{5}{4}$u.

a/Mesurine dit que la longueur du segment c peut aussi s'écrire 1u+$\frac{3}{2}$u, a-t-elle raison ?
b/Numérix dit qu'on peut aussi écrire cette longueur $\frac{7}{4}$u.
c/Calculo affirme que $\frac{20}{8}$u est aussi la longueur du segment C.
Cherche plusieurs autres façons d'exprimer la longueur des segments que tu as tracés dans l'exercice 1. Utilise l'unité u.

Cette première tâche peut être effectuée de différentes façons :
-De manière expérimentale c'est-à-dire en reportant une fois la bande et trois fois la demi-bande puis de constater que cette manipulation permet de mesurer le segment C.
-de manière plus théorique en décomposant comme suit la première expression de C
La difficulté de la tâche tient au fait qu'il faut s'autoriser à décomposer 2u +1/2u :
-soit en 1u + $\frac{1}{2}$u+$\frac{1}{2}$u+$\frac{1}{2}$u =1u+$\frac{3}{2}$u
-soit en $\frac{1}{2}$u+$\frac{1}{2}$u+$\frac{1}{2}$u+$\frac{1}{2}$u+$\frac{1}{2}$u = 1+ $\frac{1}{2}$u+$\frac{1}{2}$u+$\frac{1}{2}$u=1u+$\frac{3}{2}$u.
On peut effectuer le même raisonnement avec les deux autres questions de l'exercice.
La validation des expressions se réalise en s'appuyant sur le matériel ou par la connaissance systématique de certaines équivalences telles que : $\frac{1}{2}$ c'est $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{8}$ et encore 1= $\frac{2}{2}$= $\frac{4}{4}$= $\frac{8}{8}$

Cet exercice va permettre de montrer de nombreux exemples d'expressions différentes d'une même mesure. Il est possible d'établir que : $2u+\frac{1}{2}u = 1u+\frac{3}{2}u = \frac{20}{8}u$

Pour autant, les règles d'addition des fractions ou de réduction au même dénominateur ne peuvent pas être données. Cet exercice permet de dire qu'il existe de nombreuses écritures pour la même longueur que l'on peut généraliser en disant qu'il existe plusieurs écritures du même nombre.

2.9.1 Reconstitution des EC de la séance 3 et codage.

Entre 2u et 3u, il y a plusieurs solutions pour tracer des segments de longueurs différentes. [EC_G] Entre 2u et 3u, on peut tracer un segment de longueur $2u+\frac{1}{4}$; $2u+\frac{1}{2}u$; $2u+\frac{2}{8}=2u+\frac{1}{4}$ [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$] : Remarque : dans le discours de Solène l'unité u parfois disparait. Un quart de u c'est deux huitièmes. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$]
On trace une droite c'est une longueur. (erreur !) Une bande unité c'est huit huitièmes. [EC_G] Pour avoir 3 huitièmes on reporte 3 fois une part de 1/8 donc c'est plus petit. (que la bande unité mais ce n'est pas dit). [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$] 5 demis, c'est plus grand que la bande unité. [EC_G] On a deux segments de la même longueur mais ils ne sont pas exprimés de la même manière. On a des fractions équivalentes. [EC_G] Cinq quarts, c'est plus grand qu'une unité. [EC_G] Une unité c'est quatre quarts donc cinq quarts c'est une unité plus un quart. [EC_G] Quand le numérateur est plus grand que le dénominateur, on a une longueur plus grande que l'unité de départ. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$] Egalités données à l'oral : $\frac{5}{4}u=\frac{1}{4}u+1u$; $\frac{1}{4}u+1u=2u+\frac{1}{4}u$.
Si tu as cinq demis tu reportes cinq fois une demi-unité. [EC_G] C'est important de regarder le numérateur et le dénominateur pour voir si la longueur est plus grande que 1. (Proposition de reformulation possible : Si le numérateur est égal au dénominateur alors la fraction vaut 1, si le numérateur est plus grand que le dénominateur la fraction est plus grande que 1) [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]

Remarque : lorsque Solène utilise Cap Math elle utilise l'unité u, elle ne l'utilise pas quand elle utilise ERMEL. L'utilisation de cette unité marque l'aspect mesure des fractions, on mesure une fraction d'une mesure qui vaut 1. L'aspect opérateur est aussi présent puisqu'on prend la fraction de…Elle utilise assez aléatoirement cette unité u (souvent présente du côté d'une égalité et pas de l'autre, souvent présente à gauche mais pas à droite).

Nous retrouvons dans cette reconstitution une liste d'énoncés intermédiaires produits à différents moments de la séance. Ces EC ne font pas l'objet d'une affiche ou d'un écrit. Les connaissances plus travaillées sont : la possibilité d'additionner un nombre entier et une fraction, de passer d'une fraction à un entier et enfin d'utiliser la règle de comparaison d'une fraction et de l'unité.

Nous, nous voyons la possibilité de montrer que les fractions sont des nombres. Si $\frac{8}{8}$=1, 1 étant un nombre, la déduction « *huit huitièmes est un nombre* » est alors envisageable.
Chaque séance semble apporter des EC nouvelles qui pourraient être écrites en quelques lignes. Le professeur préfère les énoncer à l'oral et les rappeler en début de cours.

2.10 Analyse des EC séance 3 : année (2).

2.10.1 Analyse des EC dans la phase de rappel

Comme dans les séances précédentes, Solène remobilise les connaissances des élèves en évoquant la dernière situation vécue et non directement les EC correspondantes. Solène remobilise les schèmes d'action à produire pour tracer les segments, revient sur ce qu'il faut faire de la bande pour trouver la valeur de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, elle réexplique en utilisant l'évocation du nombre de pliures, elle insiste sur le fait que quatre quarts, huit huitièmes ou encore seize-seizièmes valent 1. Pour autant elle ne généralise pas en disant que si le numérateur est égal au dénominateur alors la fraction vaut 1.

2.10.2 Analyse des EC lors de la phase recherche.

Elle rappelle aussi que la bande devient un instrument de mesure pour mesurer des segments. Dans les extraits de cahier, les élèves dessinaient les bandes et non les segments. Solène prend donc en charge ces différents niveaux de représentations (mesure de la longueur des bandes à la mesure d'un segment). Elle montre, alors, un certain niveau de vigilance didactique. Nous notons encore des imprécisions dans le discours : « *On trace une droite, c'est une longueur. »*, elle montrait alors au tableau le segment porté par la droite. Elle confond dans son discours segment et droite, elle assimile la bande à la droite ce qui est en contradiction avec le soin qu'elle apportait en début de séance pour leur montrer les différences.

Les interactions avec les élèves ont parfois peu de sens, pour autant les élèves font ce qu'ils ont à faire et mènent jusqu'à leur terme les tâches données.

ENS32 : Pour faciliter les choses, vous pouvez d'abord tracer une droite et ensuite vous reportez votre segment au lieu de faire une unité deux unités.
Vous ne faites pas ça (elle dessine une bande), c'est une longueur. On trace une droite, c'est une longueur. La bande unité c'est parce que je ne peux pas te donner une droite, je te donne une bande, tu me reportes ton unité, c'est pas des bandes que vous tracez ce sont des droites.

2.10.3 Analyse des EC lors de la mise en commun

Les élèves devaient tracer différents segments dont les mesures étaient exprimées à l'aide de fractions. Ils devaient d'eux-mêmes déterminer la valeur d'un quart de la bande ou bien d'un huitième. Solène va au-delà de ce que la ressource conseille et conduit les élèves à comparer une fraction à l'unité en regardant les valeurs du numérateur et du dénominateur.
Les EC produites sont toujours « *discutées* ». Guidés par l'enseignant, les élèves finissent par produire ce qui semble être attendu.

Dans le cahier de cours cette EC ne sera jamais reprise. Cette EC est descendante (du général vers l'exemple)

ENS 48 : Quand le numérateur est plus grand que le dénominateur, on a une longueur plus grande que l'unité de départ.

2.10.4 Analyse des Ec lors de la phase de conclusion

La règle clairement énoncée est reprise dans une série d'échanges, Solène fait face aux difficultés des élèves interrogés pour la produire correctement. Solène devra relancer 6 fois les élèves.

Emma : Pour voir si le numérateur est plus grand que le dénominateur pour le reporter
ENS56 : La longueur que tu vas obtenir va être plus…
Emma : Reportée ?
ENS57 : Plus grande que l'unité de départ, Lucille tu as entendu, ça m'étonne,

La règle ainsi formulée est assez hachée (énoncée dans un dialogue) : c'est important de regarder le numérateur et le dénominateur pour voir si le numérateur est plus grand que le dénominateur pour le reporter. La longueur obtenue sera plus grande que l'unité de départ.
Ces EC « *discutées* » mobilisent certains élèves mais leurs formulations sont inabouties/inachevées et à notre avis difficilement mémorisables en première intention. Solène a recours assez systématiquement à un langage mixte qui parfois rend assez opaque le discours. Les avantages de ces EC discutées sont peut-être du côté de l'adaptation aux élèves mais comportent des imprécisions mathématiques.

2.11 Analyse a posteriori et synthèse

2.11.1 Un déroulement qui s'éloigne de la ressource et ses effets sur les EC.

Nous n'avons pas le film complet de cette séance. Solène revient comme le conseille la ressource sur l'équivalence des écritures des fractions mais va au-delà en introduisant la règle suivante : quand le numérateur est plus grand que le dénominateur la fraction est plus grande que 1. Nous avons mis en évidence qu'elle ne la formule pas de cette façon-là. Solène ne peut plus s'appuyer sur la ressource « *guide du maître* » puisque ces séances ne correspondent plus à une découverte des fractions. Solène détourne les intentions de la ressource et se retrouve à devoir encore plus improviser. Les instructions officielles et les documents associés ne disent pas s'il y a des règles à apprendre ni lesquelles. La marge de manœuvre est si importante que l'enseignante semble hésiter et ne pas savoir jusqu'où elle a le droit d'aller (confirmé par Solène le 16/06/2015). Elle s'abstient donc de formuler ou d'écrire des énoncés plus formels.

2.11.2 Des EC discutées : au carrefour des difficultés de l'enseignante à formuler des EC et prise en compte du temps d'apprentissage des élèves.

Solène[67] nous explique aussi que pour elle la verbalisation est indispensable à l'apprentissage. C'est pour cela que nous voyons dans les EC discutées de Solène plus qu'une modalité de gestion.

[67] *Nous rappelons que Solène a un DEA de psychologie du développement*

Les EC « *discutées* » permettent aux élèves d'adopter les mots, ainsi Emma (élève ayant de très bonnes bases en mathématiques) parle du « *nominateur* ». L'enseignante reprend et corrige. Cela nous permet de dire que malgré la leçon écrite l'année passée, malgré les rappels de la séance 1, le vocabulaire n'est pas encore intégré. Deux explications nous apparaissent, l'une que l'on peut imputer au professeur : Solène n'utilise pas toujours un langage mathématique adapté. L'autre implique une réalité du développement de l'élève prise en compte par l'enseignante : assimiler une nouvelle notion (même du vocabulaire) nécessite un temps long.
L'enseignante semble s'accommoder de ce temps long en sollicitant régulièrement les élèves et en tolérant un langage mixte dont elle fait également l'usage.

2.12 Analyse a priori de la séance 4 : activité H

L'énoncé suivant reprend la présentation et les tâches de la séance précédente. C'est à la charge des élèves de produire d'autres écritures des mesures. Le guide du maître indique « *Dans cette séance, les élèves sont amenés à utiliser d'autres fractions de dénominateurs : 3 ou 6 nécessitant un nouveau partage de l'unité moins naturel que le partage en 2, 4, 8.* » p170
Consigne :Trace les segments dont les longueurs sont données dans ce tableau.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$ u	1u+ $\frac{2}{3}$ u	1u-$\frac{1}{6}$u	$\frac{6}{3}$u	$\frac{8}{6}$u

Trouve plusieurs autres façons d'exprimer la longueur de chaque segment tracé. Utilise l'unité u.

Les élèves ont à leur disposition une bande unité qui vaut 1u. Les stratégies pour tracer les segments sont les mêmes que dans l'énoncé précédent : de manière expérimentale ou en décomposant les différentes expressions. Le guide du maître ne les liste pas.
De plus, la première fraction 1/3u n'induit pas une décomposition de l'unité mais le partage de cette fraction de l'unité en sixièmes.
Le segment C propose une différence, ce qui est une nouveauté.
Cet exercice permet d'établir d'autres équivalences suggérées par le guide du maître comme
$\frac{2}{6}$ u =$\frac{1}{3}$ u ; $\frac{2}{3}$ u =$\frac{4}{6}$ u
Exemples des différentes expressions que les élèves peuvent trouver (la liste n'est pas exhaustive d'autant plus si on autorise les différences)
$\frac{1}{3}$ u =$\frac{2}{6}$ u ou 1u -$\frac{2}{3}$ u
1u+ $\frac{2}{3}$ u = $\frac{5}{3}$ u ou $\frac{10}{6}$ u
1u+ $\frac{2}{3}$ u = 1u+$\frac{4}{6}$ u
1u-1/6u = $\frac{5}{6}$ u
$\frac{6}{3}$ u = 2u ou $\frac{12}{6}$ u
$\frac{6}{3}$ u = 1u +$\frac{3}{3}$ u
$\frac{8}{6}$ u =1 $u + \frac{2}{6}$ u ou 1u+ $\frac{1}{3}$ u

2.13 Reconstitution des EC, codage et analyse des données.

Dans les paragraphes ci-dessus, nous avons détaillé les analyses des EC pour chaque partie. La séance est courte et les EC sont assez peu nombreuses. Nous n'allons donc pas détailler selon les épisodes.

Un gâteau c'est une unité. [EC_{rmc}] Quatre quarts c'est une unité découpée en quatre parts égales. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$] Prendre les 4 parts ça fait une unité. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$]
10 quarts c'est vingt huitièmes. [EC_G] Il faut doubler [EC_G]
Des tiers ce sont des unités séparées en 3. [EC_G] On ne dit pas des troisièmes car un demi, un quart, un tiers ont des noms spécifiques. [EC_G] Une unité c'est six sixièmes. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$] Trois tiers et trois tiers c'est deux unités. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]
On a un numérateur plus grand que le dénominateur (pour 8/6), 8/6=1+2/6. [EC_G]

De nouveau les EC sont mixtes certaines sont ascendantes(2) d'autres descendantes (2) d'autres encore sont isolées.

2.14 Analyse a posteriori.

2.14.1 Des difficultés liées au matériel

Lors de cette séance il y a assez peu d'EC, les élèves s'entraînent à refaire la même activité mais avec des fractions dont les dénominateurs (3,6) sont « *nouveaux* ».Quelques élèves ont un peu plus de difficultés à se lancer dans l'activité, essentiellement à cause de pliages en tiers de la bande. À part 3 élèves, tous arrivent à terminer l'activité, ils ont mis plus de temps à réussir à plier la bande en tiers.

2.14.2 Des EC discutées: au carrefour des difficultés de l'enseignante à formuler des EC et prise en compte du temps d'apprentissage des élèves.

Une élève demande pourquoi les tiers ne s'appellent pas des « *troisièmes* ». Nous voyons dans ce questionnement deux faits que nous avons pointés : l'apprentissage sur un temps long. Mais aussi nous voyons aussi une conséquence possible du manque de généralité dans les EC écrites sur la lecture des nombres (seuls des exemples isolés étaient proposés). Solène tente de généraliser en disant : « *On ne dit pas des troisièmes car un demi, un quart, un tiers ont des noms spécifiques. [EC_G]* ». Nous notons que Solène ne renvoie pas à la lecture de la leçon écrite, elle répond à l'élève sans sembler étonnée de la question.
De nouveau nous notons des imprécisions dans la formulation orale, ce sont toutes les fractions dont les dénominateurs sont 2, 4, 3 qui ne se lisent pas en « *ième* » mais ont une lecture « *spécifique* ».

Des équivalences sont écrites au tableau, nous relevons

$1u+\frac{2}{3}u\boxed{=\frac{3}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}u$ On note l'oubli de l'unité u dans l'égalité du milieu.

$1u-\frac{1}{6}u=\frac{6}{6}u-\frac{1}{6}u=\frac{5}{6}u$

$\frac{6}{3}u=\frac{3}{3}u+\frac{3}{3}u=2u$

$\frac{8}{3}u=1u+\frac{2}{6}u$

Solène ne met pas en évidence les équivalences entre les couples telles que 2/6=1/3. Elle semble avoir atteint un de ses objectifs : les élèves savent utiliser la bande unité et tracer des segments, les élèves ont compris le codage des bandes et la possibilité de coder selon des écritures équivalentes.

2.15 Description et analyse des données des séances qui suivent sur l'introduction des fractions décimales.

Les deux séances qui suivent (celles du 4/02/2013 et du 15/02/2013) traitent des fractions décimales puis des nombres décimaux. Seulement certains extraits ont été filmés et retranscrits. Ces séances ont lieu deux mois après l'introduction des fractions.

Nous présentons l'activité du 4/02/2013. Cette activité est extraite du ERMEL CM2, s'intitule « *graduations* » et a pour objectifs annoncés p 460 :
- comprendre et utiliser le principe de construction d'une graduation régulière en dixièmes et centièmes.
- établir et utiliser les relations entre dixième et unité, dixième et centième
- savoir situer des fractions sur une graduation, les décomposer en somme de la partie entière et de fractions décimales.

Les élèves ont à leur disposition une longue bande de 3 mètres, et une bandelette qui représente un dixième de l'unité. Le zéro est placé le plus à gauche de la bande. Les élèves doivent successivement placer 1 ,$\frac{8}{10}$, $\frac{23}{10}$ et $\frac{137}{100}$.
Pour réussir la tâche, ils doivent savoir ce qu'est :
-une graduation
-un dixième de l'unité (et $\frac{10}{10}$ u =1u).
Ils doivent savoir ce que reporter une bandelette implique comme gestes (juxtaposer la bandelette et ajouter à la mesure un dixième à chaque report).

2.15.1 Les EC produites lors de la phase de rappel.

Nous retrouvons le même déroulement global (phase de rappel provoquée, recherche, Les EC produites lors de la phase de rappel
Lors de la phase de rappel les deux EC produites sont les suivantes :

$\frac{3}{5}$ c'est une fraction, cela peut se représenter ainsi : [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]

x	x	x		

C'est une unité découpée en 5 morceaux, dont on prend trois morceaux. [EC_{rm}]

2.15.2 Les EC produites lors de la phase de recherche.

Une très longue bande de papier est affichée au tableau. Sur cette bande de gauche à droite sont placées les graduations correspondant à 0, 1 et 2. La discussion s'engage pour placer le 3 et le 4. Les élèves établissent que la distance entre 0 et 1 est la même que celle entre 2 et 3.
En première intention, les élèves proposent de plier la bande, de décalquer la distance puis l'enseignante leur suggère l'utilisation d'un gabarit (bande intermédiaire plus petite représentant 1 unité).
La seule EC produite est de faire remarquer qu'il faut « *reporter la longueur entre deux numéros.* ». L'enseignante ne reformule pas et reprend les mots « *numéros* » à la place de « *deux nombres consécutifs* » ou « *deux graduations consécutives* »[68].
Une fois le 3 et le 4 placés, la consigne suivante est donnée : « *Vous avez une grande bande, vous allez devoir construire une graduation…Vous allez placer une graduation, en utilisant cette petite bande. La longueur de cette petite bande est égale à un dixième de l'unité. Le nombre zéro est déjà placé, vous allez placer le 1* ». Puis elle leur demandera de placer 25/10 et 137/100.
Les élèves sont mis en groupe, Solène passe dans les groupes, filme le travail des élèves et pose des questions.

Les EC apparaissent lors de l'explicitation en petits groupes des procédures. À l'issue de cette recherche, il n'y aura pas de mise en commun. Solène passe beaucoup de temps dans chaque groupe et s'assure de la compréhension de tous.

Ens[69] : Ça correspond à combien ? (en montrant la bandelette)
Elève : A un dixième
Ens : Pour avoir une unité il faut combien de dixièmes ?
Elève : 10
Elève : Ça, c'est un dixième de l'unité et une unité c'est dix dixièmes. (EC_G)
Un élève écrit et l'enseignante valide 1u = $\frac{10}{10}$.

La seule EC produite l'a été dans un groupe par un élève. Cette EC est reprise rapidement avant de donner la deuxième consigne.
Les groupes d'élèves se mettent très rapidement au travail et placent $\frac{25}{10}$., les procédures sont assez variées. Certains repèrent que $\frac{25}{10}$, c'est deux unités et $\frac{5}{10}$., de l'unité, d'autres reportent $\frac{15}{10}$., à la suite des $\frac{10}{10}$., déjà placés.
L'enseignante valide et demande de placer $\frac{137}{100}$.
La bandelette mesure 5 cm. Très rapidement un élève comprend qu'un demi-centimètre correspond à un centième.

Ens : Vous êtes partis de l'idée qu'une unité c'est 100 centièmes [EC_G]. Vous (en montrant un groupe), vous êtes partis de cette bande et vous l'avez coupée en 10. L'idée de plusieurs

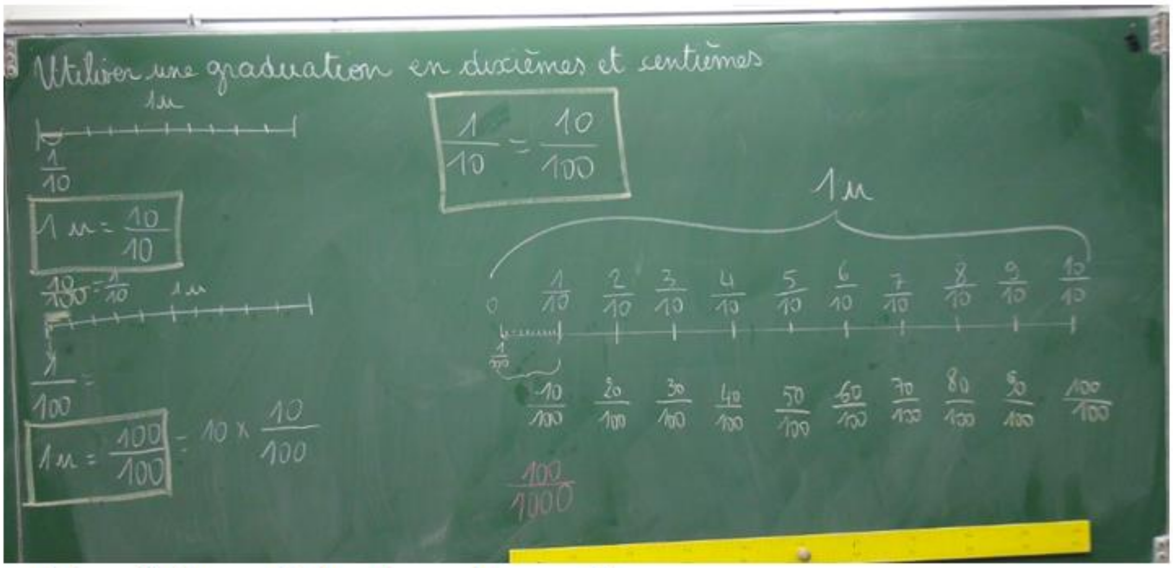
[68] *Formulations qui peuvent effectivement paraitre plus difficiles à utiliser.*

[69] *Les Ens ne sont pas systématiquement numérotés car l'enseignante a souvent éteint la caméra, si bien que nous n'avons pas l'ensemble du discours. Cela rend inutile la notation en continue pour compter le nombre d'interactions.*

groupes c'est de couper un dixième en 10 donc 10 centièmes. [EC_G]. Une unité c'est 10 fois un dixième mais aussi 10 fois dix centièmes. [EC_G]. 137/100 c'est compris entre une unité et deux unités

Tous les groupes arrivent à placer les graduations, les élèves savent reporter le dixième d'unité et ont compris (au moins en acte) ce qu'est un dixième et un centième d'unité.

2.15.3 Phase de rappel de la séance suivante



Lors de la phase de rappel, Solène établit des équivalences entre dixième et centième. L'unité u sert à évoquer la bande, mais la bande n'est plus présente. La lettre u apparaît pour évoquer les manipulations puis tend à disparaitre dans la partie droite du tableau.
L'affiche verte est rangée. La montée en généralité se fait très progressivement avec la construction et l'introduction de la droite graduée.

2.15.4 Synthèse

Pour réussir cette situation, les élèves devaient comprendre ce qu'était une fraction de l'unité et savoir utiliser la bandelette. Cette séance se déroule dans le calme, les élèves sont sur leurs tâches. Nous osons même faire une remarque assez subjective : il y a un vrai plaisir partagé de la part du maître qui voit ses élèves en réussite, et pour les élèves à s'atteler à une tâche pas si simple que ça (présentée comme une énigme à résoudre).
Cette partie plus subjective exposée, cette séance semble être « *la séance* », celle qu'il ne faut pas « *rater*[70] ». Tout ce qui a été mis en place dans les autres séances avait pour objectif cette séance. Solène lors d'une conversation téléphonique nous le confirme : « *Cette séance est importante, je passe du temps dessus, car s'ils ne comprennent pas, ensuite pour les décimaux c'est foutu, j'aime beaucoup cette séance, c'est là qu'ils font des liens.* » (le 19/05/2015).
Les séances suivantes établiront les liens entre les écritures des fractions décimales et des nombres décimaux. Ces liens réalisés, nous parions alors que le statut du nombre commence vraiment à se dessiner pour les élèves à condition de les conserver en mémoire.

[70] *Reprise du mot employé par Solène.*

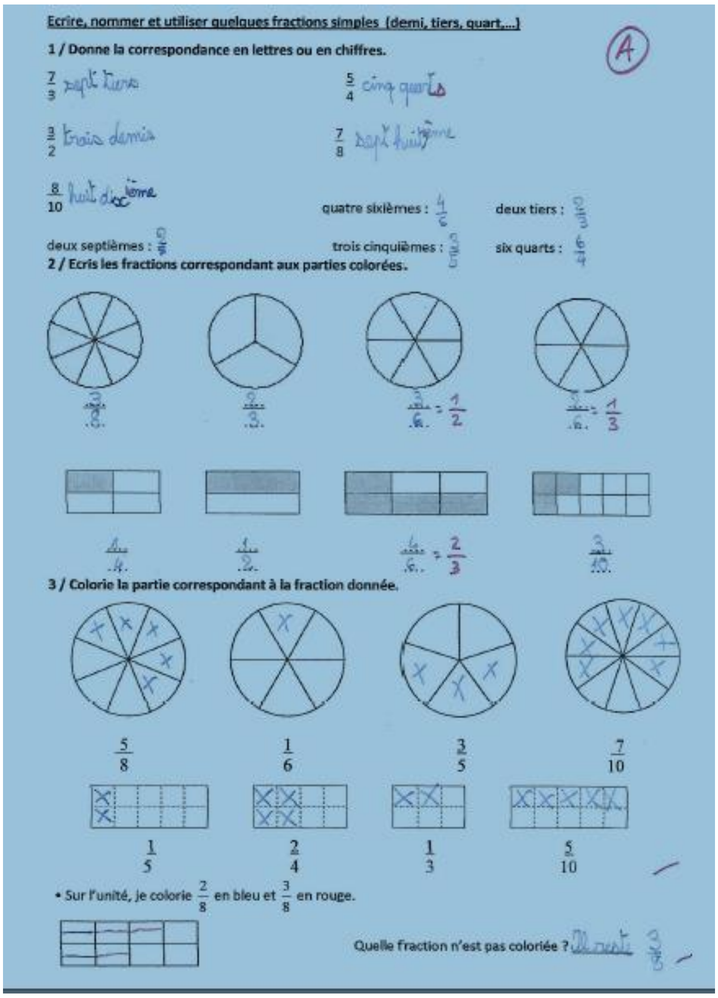
2.16 Description et analyse des évaluations.

D'autres exercices sont proposés sans avoir été filmés : le 13/12/2012. Ces exercices sont préparatoires à l'évaluation. L'une des tâches des exercices consistant à décomposer une fraction comme une somme d'entier et de fraction de l'unité.
Deux évaluations vont suivre ces 4 séances. Ces évaluations (Annexe 17) ont de l'importance pour nous car nous les considérons comme constitutives du PI dans le sens où elles montrent ce que l'enseignante attend que ses élèves aient retenu. Nous n'avons pu conserver qu'une seule évaluation d'un élève qui n'a pas de difficulté.

2.17 La première évaluation:

La première évaluation est proposée entre la troisième et la quatrième séance. Elle évalue :
- la lecture et l'écriture des fractions telles que : $\frac{7}{3}, \frac{7}{8}, \frac{5}{4}$ ….
- la capacité de coder sous forme d'une fraction le nombre de parts d'une unité donnée :
  - de la représentation géométrique (surface de disque, de rectangle) au codage sous forme d'une écriture fractionnaire.
  - du codage à la représentation géométrique.

Les fractions sont représentées dans le cas de mesure d'aire (disques ou aire d'un rectangle). Les dénominateurs choisis sont 2, 3, 4, 6, 8, 10 (Notons l'absence des cinquièmes et des septièmes).



2.18 <u>La deuxième évaluation :</u>

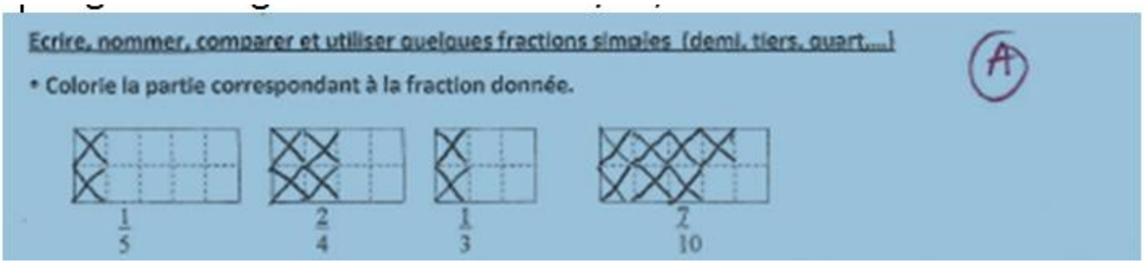
Cette évaluation est proposée juste après l'introduction des fractions décimales.

<u>a/Fraction et représentation graphique de la fraction</u>

La deuxième évaluation reprend un des items de la première : à partir de la fraction coder une représentation graphique dans un contexte d'aire de rectangle. Pour réussir cet item, il est nécessaire de connaitre des équivalences de fractions. L'esprit de cet item reprend celui des évaluations nationales qui, pour cette classe l'année précédente, avait été raté.

La première figure demande de coder les $\frac{1}{5}$ de la figure alors que l'aire du rectangle est subdivisée en 10. Les élèves doivent savoir que $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$ [71], $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$. Pour le codage de la figure de la fraction $\frac{7}{10}$, il suffit de dénombrer 7 sous unités sur les 10.

[71] *On retrouve l'esprit de cet item dans les évaluations nationales cm2 (2012) p16 (item 63).Il fallait coder les 5/10 d'un rectangle subdivisée en 16 parts égales. Dans le livret du maître on lit : Les élèves sont amenés à transformer 5/10 en un demi ou en 8/16.*



Ecrire, nommer, comparer et utiliser quelques fractions simples (demi, tiers, quart,...)

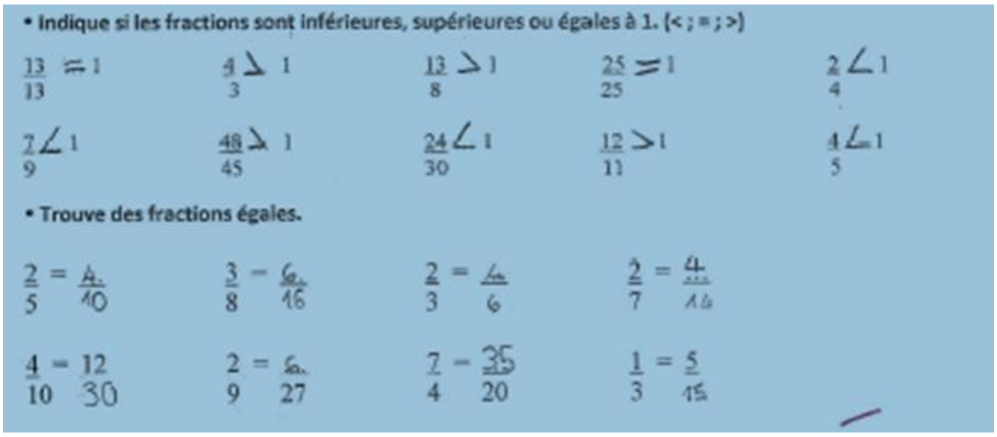
• Colorie la partie correspondant à la fraction donnée.

A

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{7}{10}$

b/Comparaison de fractions et fractions équivalentes.

Les deux consignes suivantes : « *indiquer si les fractions sont inférieures, supérieures ou égales à 1* » et « *trouve des fractions égales* » correspond bien à des tâches que les élèves ont réalisées. Cependant, la grandeur des nombres et leur variété (dénominateurs qui valent 13, 45, 30, 11) sont bien plus grandes que celles fréquentées dans les 4 séances filmées.
Nous savons qu'il y a un exercice réalisé avant cette évaluation car il est présent dans le cahier du jour, l'évaluation suivra cet exercice. La montée en généralité s'est donc réalisée en 5 séances et est visible dans l'évaluation.
Les EC écrites n'outillent pas pour répondre à ces tâches. L'ensemble des EC orales n'est pas suffisamment général pour nous permettre de comprendre comment a été prise en charge cette montée en généralité.
Peut-être est-ce dans cette séance supplémentaire (exercice dans le cahier du jour) que les EC orales plus générales ont été produites ? Il n'y a aucune EC écrites correspondantes ni dans les cahiers d'exercices ni les cahiers de cours.



• Indique si les fractions sont inférieures, supérieures ou égales à 1. (< ; = ; >)

$\frac{13}{13} = 1$ $\frac{4}{3} > 1$ $\frac{13}{8} > 1$ $\frac{25}{25} = 1$ $\frac{2}{4} < 1$

$\frac{7}{9} < 1$ $\frac{48}{45} > 1$ $\frac{24}{30} < 1$ $\frac{12}{11} > 1$ $\frac{4}{5} < 1$

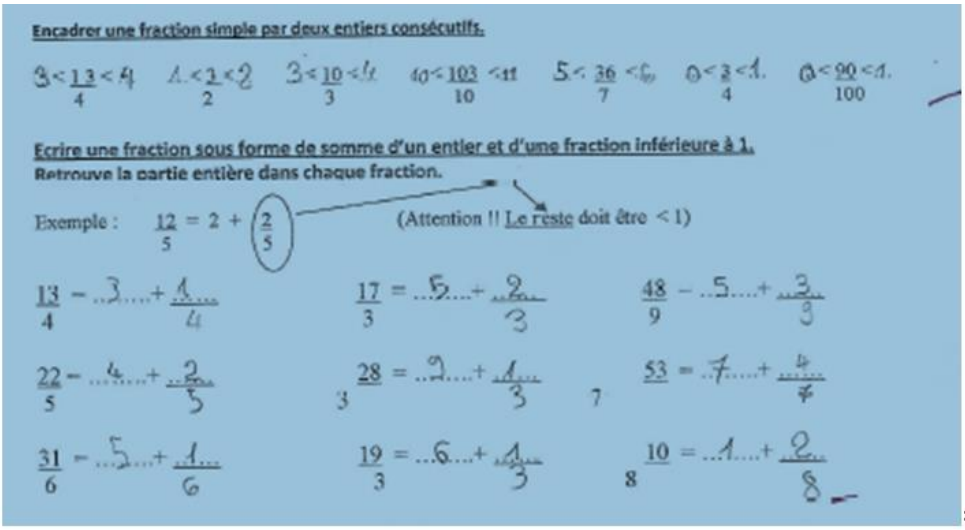
• Trouve des fractions égales.

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$

$\frac{4}{10} = \frac{12}{30}$ $\frac{2}{9} = \frac{6}{27}$ $\frac{7}{4} = \frac{35}{20}$ $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$

c/Encadrement de fractions entre deux entiers consécutifs et écriture de fractions sous la forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

Ce qui est demandé à l'évaluation correspond bien en termes de tâches à ce qui a été travaillé. En revanche, la grandeur des nombres est comme précédemment bien plus importante, ce qui modifie les procédures d'autant plus que les élèves n'ont pas la bande unité.



Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.

$3<\frac{13}{4}<4$ $1<\frac{3}{2}<2$ $3<\frac{10}{3}<4$ $10<\frac{103}{10}<11$ $5<\frac{36}{7}<6$ $0<\frac{3}{4}<1$ $0<\frac{90}{100}<1$

Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
Retrouve la partie entière dans chaque fraction.

Exemple : $\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$ (Attention !! Le reste doit être < 1)

$\frac{13}{4} = ..3.... + \frac{..1...}{4}$ $\frac{17}{3} = ..5... + \frac{..2..}{3}$ $\frac{48}{9} = ..5.... + \frac{..3..}{3}$

$\frac{22}{5} = ..4... + \frac{..2..}{5}$ 3 $28 = ..9.... + \frac{..1...}{3}$ 7 $53 = ..7.... + \frac{..4..}{7}$

$\frac{31}{6} = ..5... + \frac{..1...}{6}$ $\frac{19}{3} = ..6... + \frac{..1..}{3}$ 8 $10 = ..1.... + \frac{2}{8}$

=

Tous les items évalués correspondent aux attendus des instructions officielles. Tous ces items ont été travaillés en classe. En revanche, la taille des nombres de la deuxième évaluation est bien plus grande que celle de ceux fréquentés dans les exercices. Les élèves sont conduits à encadrer par des entiers consécutifs 90/100 ou 103/10 ce qui nous apparait un saut conséquent par rapport aux activités des séances filmées. Hormis la séance du 13/12, nous n'avons pas de traces visibles d'autres entrainements.
En revanche (taille des nombres mise à part), l'évaluation est en cohérence avec les tâches proposées dans les séances de classe mais le degré de généralité des exercices est plus élevé. La bande unité n'est pas utilisée pendant l'évaluation, la référence à l'unité u n'est pas présente. Il y a eu visiblement une montée forte en généralité que nous ne pouvons expliquer. Cette évaluation nous conduit à penser que la montée en généralité est à la charge des élèves. Nous savons peu de chose sur les résultats de cette évaluation, Solène nous a juste dit que « *comme d'habitude 5 ou 6 élèves n'avaient vraiment pas réussi* ». Cette affirmation est trop vague pour que nous puissions en tirer des conclusions.

3 Conclusion

Les séances sont construites selon des scénarios proches : phase de rappel, recherche, mise en commun, conclusion. Les articulations des séances sont faites en remobilisant dans un premier temps les activités des élèves. L'enseignante articule ensuite la description des tâches et l'utilisation du matériel avec des EC plus ou moins générales.
L'EC écrite ne semble pas être la clé de voute du Processus d'Institutionnalisation. Ce texte n'est pas un texte de référence, ni lors des cours, ni pour les évaluations. Il semble plus avoir le rôle d'une occasion (d'un prétexte) supplémentaire de redire l'histoire didactique de la classe ou encore de faire vivre ensemble des mots de vocabulaire qui seront utiles. Le temps de lecture de l'EC écrite est un temps d'échanges de ré-explication des termes, des égalités.
Il n'y a pas d'EC dont les énoncés soient de degré 1 ou 2. Les EC sont de degré 3 plus ou moins génériques. Ces EC essaient, dans un même énoncé, d'articuler des énoncés un peu plus généraux avec des EC d'un contexte donné (celui de la découverte des fractions à partir de bande de référence). La comparaison du nombre d'EC ascendantes et descendantes n'est pas suffisamment significative pour dire si les unes sont plus favorisées que les autres. Nous retenons surtout que le professeur utilise un langage mixte et articule dans un même

énoncé du général (faible) et du particulier. Ces EC sont diffuses et non étiquetées en tant que telles. Les indicateurs que nous avons repérés qui annoncent des EC ne sont pas suffisamment explicites pour affirmer que ce qui est dit ne relève pas d'une simple explication ou d'une remise dans le contexte pour mobiliser l'attention des élèves. Trois qualificatifs permettent de décrire ces EC : elles sont discutées, diffuses et non étiquetées en tant que connaissances. Elles sont peu ou pas décontextualisées et en partie dépersonnalisées car discutées par tous. Le Processus d'Institutionnalisation est bien visible dans le sens où de nouvelles connaissances sont articulées entre elles et présentes. En revanche le PI est inabouti. La dimension sociale du PI est prise en charge : les élèves, avec l'aide de l'enseignante, font vivre collectivement et créent des EC.
La dimension cognitive est en partie visible notamment dans l'acceptation de l'enseignante qu'apprendre se fait sur un temps long et en articulant ancien et nouveau. En revanche la montée en généralité est moins prise en charge, la PE accumule des exemples et ne formalise pas de règles générales.

La bande unité a été instrumentalisée, et devient un instrument indispensable pour valider l'équivalence des écritures, réaliser des sommes ou des différences, ou des produits d'un nombre entier par une fraction. Il est difficile de s'en détacher pour produire des égalités sans l'utilisation explicite de l'unité u. Cependant, dans le discours du professeur « *u* » apparait et disparait. Ainsi il peut dire « *Trois tiers et trois tiers c'est deux unités* », est-ce un oubli du professeur ou une volonté plus ou moins explicite de généraliser les égalités ?
Enfin, nous notons une montée en généralisation présente dans les évaluations, nous avons trop peu d'informations sur ces évaluations (dates de passation, résultats pour la classe), pour en déduire quoi que ce soit de significatif si ce n'est que nous constatons que les EC produites ne permettent pas a priori de réussir l'évaluation.
Les fractions, dans cette progression, n'ont pas vraiment pu acquérir leur statut de nombre, d'une part parce que les contextes (un seul contexte dans le cas continu) n'ont pas varié, d'autre part parce qu'il est impossible d'effectuer des opérations avec ces « *nouveaux nombres* ». Il est difficile aussi de dire que le concept de fraction a été construit sachant que seuls les aspects « *partie d'un tout* » et « *mesure* » sont travaillés. L'aspect opérateur est présent mais s'applique à une unité qui vaut 1, donc il est assez transparent (« *un tiers de u* » et u=1). Les deux autres aspects « *ratio* » et « *quotient* » ne sont absolument pas travaillés.

Chapitre VI – Solène : comparaison des expositions de connaissances écrites et orales

La partie 2 est composée de trois chapitres : le chapitre 4 présente sur cinq années les EC écrites produites par une enseignante au regard des ressources utilisées, le chapitre 5 présente et analyse des EC orales produites lors de séances sur les fractions jusqu'à l'introduction des fractions décimales. Le chapitre 6 compare des séances dont le contenu est a priori identique.
Le chapitre 6 compare les EC orales produites par la même enseignante à partir des mêmes séances du même projet sur trois années consécutives -de 2011 à 2014-
Ce chapitre permet alors de comparer les régularités et les variabilités d'une année sur l'autre et de proposer des éclairages sur le contenu des EC liées à la pratique de classe d'un enseignant. Pour comprendre les EC produites, nous allons décrire et analyser les déroulements puis focaliser sur les EC. Il s'agit pour nous de déterminer la cohérence et la complexité des pratiques de ce professeur lors des EC sur trois années.
La partie 1 de ce chapitre s'appuie et précise une partie de ce qui a été déjà exposé[72] ainsi que la méthodologie adoptée.
La partie 2 compare deux activités proposées successivement en année (1) puis en année (3). Suite à l'analyse des EC produites pour chaque année, nous en proposerons une comparaison.
La partie 3 compare les EC produites suite à une même activité pour les années (1), (2) et (3).

1 Recueil de données et méthodologie : rappel et précisions.

1.1 Rappel des données

Rappelons que pendant 3 ans, nous avons suivi une enseignante qui utilise le même projet sur l'enseignement des fractions. Ce projet se décline sur les deux dernières années de l'école primaire. Nous avons filmé deux séances l'année (1), cinq séances l'année (2) et cinq séances l'année (3). Sur ces trois années cumulées nous avons filmé 12 des 15 séances du projet. Nous avons recueilli les cahiers d'exercices pour les années (2) et (3) ainsi que les recueils de leçons pour les trois années consécutives.

La trace écrite dont nous avons dégagé trois parties est identique pour les deux premières parties (EC1 et EC2). C'est la dernière partie (EC3) qui varie pour disparaitre l'année (3). Une

[72] en particulier les particularités des classes successives.

affiche collective (EC4) remplacera (EC3). Nous ne reviendrons pas sur ces comparaisons qui sont l'objet de la partie I du chapitre 4. En revanche nous allons comparer dans ce chapitre, le traitement qui est fait de cette trace écrite à l'oral les trois années successives.
Pour les EC orales, nous allons pouvoir comparer, lors de la séance d'introduction des fractions, les EC réalisées les années (1) et (2).
Seule la partie E est commune aux trois années. Nous proposons une comparaison à la fois des déroulements et des consignes pour mieux comprendre la production des EC.

1.2 *Précisions sur la méthodologie.*

De manière à mettre en perspective les liens entre contenu, gestion de classe et production des EC, nous allons rappeler et commenter les éléments de déroulement qui varient d'une année sur l'autre. Nous voulons montrer en quoi ces variations ont un rôle dans les productions des EC. Pour faciliter les comparaisons nous ne faisons apparaitre dans le corps de la thèse que la reconstitution des EC. Les transcriptions sont classées année par année en annexe.
Lorsque nous comparons les déroulements, nous utilisons les films afin de voir aussi la gestion des tableaux, du matériel. Nous avons pointé que les régularités sont d'une part du côté du projet global et des choix des activités proposées et d'autre part, pour Solène, du côté de l'importance qu'elle donne aux interactions langagières (élèves-enseignants et élèves-élèves).
Nous allons comparer certaines parties des séances.
Le tableau présenté et commenté dans le chapitre 4 montre les parties des séances communes. (Annexe 3 p97)
Nous allons donc pouvoir comparer les parties A et B lors des années (1) et (3), la partie E commune aux trois années.

1.3 *Rappel des caractéristiques des années et des classes.*

1.3.1 *L'année (1) : classe de CM1-CM2*

L'année (1) correspond à la première année où Solène enseigne les fractions selon l'itinéraire construit avec sa collègue. Solène a en charge une classe de CM1-CM2. Pour ces séances sur les fractions, Solène et sa collègue reforment un groupe classe de CM2. Ainsi pendant que Solène enseigne aux CM2 les fractions, Danièle enseigne au CM1 la division.
Cette classe est d'après Solène l'une des plus difficiles qu'elle n'ait eue. Les élèves ne cessent de l'interrompre, n'écoutent pas les consignes. Les élèves entre eux s'invectivent sans arrêt. C'est pourquoi il avait été décidé de les séparer dans deux classes. D'après Solène le climat de cette classe a réussi à être plus serein à partir de Janvier pour redevenir difficile en mai.
Nous avons trois séances filmées de cette classe. Parfois il a été difficile de retranscrire car les élèves sont très bruyants, les chaises bougent beaucoup et l'enseignante est tellement sollicitée qu'elle n'arrive pas à terminer ses phrases, si bien qu'elle parle très vite. Pour nous ce sont des indicateurs que la paix sociale n'est jamais vraiment acquise dans cette classe-là.

1.3.2 *L'année (2) : classe de CM2*

Nous avons consacré la partie II du chapitre IV à l'année (2). D'une part, parce que nous avions un relevé de données plus conséquent et d'autre part, parce que la paix sociale et la paix scolaire étaient bien mieux. L'année (2) est également l'année où Solène a passé son examen de maître formateur, ce qui implique l'exercice d'une vigilance plus importante quant à la gestion et à la tenue de classe. Solène estime que cette classe a été parfois difficile à gérer à cause « *d'élèves qui ont une forte personnalité* ». Les élèves dont elle parle avaient été pour certains diagnostiqués précoces et répondaient très rapidement. Solène a par ailleurs, sollicité l'aide d'une conseillère pédagogique pour l'éclairer sur le comportement de ses élèves et l'aider à préparer son examen professionnel.

1.3.3 L'année (3) : classe de CM1

C'est la troisième année que Solène enseigne les fractions à partir du même projet global.
La particularité de cette classe, d'après Solène c'est la présence d'élèves en grande difficulté scolaire accompagnés d'AVS[73]. Les élèves s'interpellent beaucoup et ont du mal à suivre les règles de la classe. Pour autant cette classe est moins bruyante que l'année (1) mais c'est au prix d'une vigilance constante du professeur. Solène ne cesse d'interroger ses élèves de les envoyer au tableau. Il y a peu de moments sans parole dans la classe.
Enfin, Solène ne l'évoque pas, mais un Tableau Blanc Interactif (TBI) vient remplacer le tableau noir. Ce changement de support modifie les routines de Solène. Bien que ce ne soit pas notre sujet d'étude, nous montrerons en quoi la présence de ce TBI a un rôle dans les modifications des EC.

1.3.4 Comparaison et caractéristiques des trois années.

L'année (1) et (3) semblent se ressembler. Sur les 17 parties différentes rappelées dans le tableau, 9 sont communes (A, B, D, E, I, J, EC1, EC2, EC4) pour ces deux années-là. Solène commence l'enseignement des fractions décimales l'année (3) mais poursuit cet enseignement l'année (4).
Enfin, les deux classes se ressemblent aussi, d'après Solène, car elles sont qualifiées de bruyantes et d'agitées Les différences que nous notons sont, du côté des élèves, la présence, d'une, voire de deux AVS et du côté de la pratique de l'enseignante, l'utilisation d'un Tableau Blanc Interactif à la place du tableau noir habituel. Enfin, remarquons qu'au cours de l'année (3), Solène est devenue maitre formateur (PEMF). Elle a validé par cet examen ses compétences professionnelles.
Si nous devions décrire en quelques phrases les différentes années, c'est ainsi que nous le ferions :
L'année (1) est l'année de la découverte du projet avec une classe pour laquelle la paix sociale n'était pas assurée.
L'année (2) celle de sa mise en œuvre en s'appuyant sur les réussites et difficultés repérées l'année précédente dans un contexte de classe jugé plus favorable par l'enseignante. La paix scolaire est assurée.
L'année (3), le projet global est « *validé* », aucun changement n'est apporté. L'enseignante reprend ses fiches de préparations, ses affiches. Elle semble s'appliquer à maintenir la paix sociale.

---

[73] AVS : aide de vie scolaire. Ce personnel non titulaire de la fonction publique accompagne les élèves de 8 à 20 heures les élèves dans la classe.

2 Comparaison des EC orales produites pour des parties A et B, années (1) et (3)

Nous venons de faire les rappels sur le profil des classes et les parties de l'itinéraire cognitif empruntées selon les années. Nous allons décrire ci-dessous le contenu de la séance d'introduction constituée des parties A et B, puis nous reviendrons sur les séances traitant de la partie E.

2.1 <u>*Description et analyse de l'activité A.*</u>

La partie A est constituée de deux phases l'une phase de calcul mental et une phase de recherche.
La première activité de la séance est du calcul mental. Il s'agit de calculer des moitiés et des quarts de nombres dictés. Cette phase peut être vue comme étant une phase de rappel provoquée. L'activité mobilise les connaissances de ce qu'est la moitié et le quart d'un nombre et les procédures associées.
Extrait de la fiche de préparation (Annexe 15 p109):

Donne la moitié de : 100	50	28	36	38
Donne le quart de : 100	50	28	36	44

L'enseignante choisit une situation du ERMEL[74]: intitulée « *les bandes* » pour introduire les fractions.

Après avoir présenté une bande de 3 cm de large et de 21 cm de longueur, donner la consigne suivante.
<u>Consigne telle qu'elle est donnée dans le ERMEL</u> : « *Découpez dans cette bande un morceau égal à trois quarts de la longueur de la bande.* »

Nous identifions deux procédures possibles :
Première procédure :
-plier en deux la bande en juxtaposant les deux extrémités, puis replier en deux.
Une fois les plis marqués, découper un quart de la bande.
Une fois la bande découpée, la bande comporte deux plis, chacun des trois quarts est visible.
Deuxième procédure :
-plier la bande en deux, la déplier. Replier l'une des moitiés en deux, et découper le quart. La bande comporte alors un seul pli séparant le demi et le quart.
Plier en deux et encore en deux, revient à trouver la moitié ou le quart de la longueur de la bande.

[74] *P453*

2.2 Reconstitution des EC sur le calcul mental et pour la partie A année (1) et (3)

2.2.1 Reconstitution des EC pour le calcul mental et la partie A : année (1).

Pour le calcul mental

Trouver la moitié, c'est **couper** en deux un nombre ou une figure. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]
C'est deux fois moins. [EC_G]
Un quart c'est **couper** un nombre ou une figure en 4. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$] C'est quatre fois moins. [EC_G]
Pour trouver la moitié de 50 : comme ce n'est pas un nombre pair au niveau des dizaines[75]. [EC_{rmc}]. Tu descends à 40.
Le quart de 36 c'est 9 car 9 fois 4 c'est 36. [EC_G]
Le quart de 44 c'est 11, 11 fois 4 égalent 44. [EC_G]

L'année (1), Solène utilise des mots du registre de l'action « *couper un nombre ou une figure en quatre* », sans dire que le résultat de « *trouver le quart* » c'est l'une des parts coupées. Puis elle propose une nouvelle formulation « *c'est 4 fois moins* »[76]. Elle n'écrit rien au tableau, à l'oral elle conclut en interrogeant une élève que « *quatre fois moins* » c'est comme trouver le quart sans proposer un début de formalisation écrite mathématique. (Telle 4x….=36).

Enfin, l'année (1), elle propose une validation du résultat en s'appuyant sur le calcul. Aucune validation de ce type n'est proposée l'année (3). L'année (1), elle formule :

Ens : que prendre le quart c'est chercher « ***Dans la table de 4 qu'est ce qui fait 36*** *?* » ou encore **« *c'est 4 fois quelque chose ?* ».** Ces EC diffuses apparaissent lors de justifications ou encore lors de validations de résultat **« *4x4=16 pas 28 donc 4 n'est pas le quart de 28* »**.

Elle ne produit jamais d'EC suffisamment générales qui lui permettraient de faire le lien entre « *prendre le quart* » et «*le répertoire de la table de multiplication de 4.* »

Pour la phase de recherche :

Durée 17 minutes : Mise en commun : **hiérarchisation des procédures** : toutes les bandes sont affichées, Solène traite d'abord le cas des deux bandes qui sont plus courtes que les autres (Les élèves ont reproduit les 3 quarts de la bande mais pas la bande unité), puis fait passer au tableau les élèves qui ont des procédures différentes. Marvin, le dernier élève, est celui qui a une procédure très efficace mais pas majoritaire.(Deuxième procédure)

[75] *Confusion entre chiffre et nombre.*

[76] *« Quatre fois moins » ou « trouver le quart », pourrait être formulé comme « c'est trouver un nombre qui multiplié par quatre donne le nombre de départ ou combien de fois 4 dans… ? ».*

Les bandes sont affichées au tableau.
L'année (1), cette phase est assez courte et dure 10 minutes. Solène conclut et écrit au tableau des fractions sans introduction.
Elle « *écrit au tableau* $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$. *Vous avez découpé chaque demi en deux et* $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$ *égalent l'unité* ». Elle n'écrit pas « *=1* ».
Les élèves ne manifestent aucun étonnement alors qu'ils n'ont jamais vu les fractions ni en CE2 ni en CM1. L'écriture ne leur semble pas étrangère ni susciter pour le moment d'interrogations.
En plus des égalités citées ci-dessus, les autres EC produites sont en lien étroit avec l'évocation du matériel.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$,
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$ égalent l'unité.
La bande pliée en deux donne des demis. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$]
Plier la bande en deux puis encore en deux, ça donne des quarts. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$]

2.2.2 Reconstitution des EC sur le calcul mental et la partie A : année(3)

Pour le calcul mental :

Trouver la moitié, c'est la moitié d'un chiffre. [$EC_{G.}$]
C'est aussi prendre une heure **coupée** en deux et ça fait 30 minutes.[$EC_{Nc.}$]
C'est deux fois moins. [$EC_{G.}$]
C'est plus difficile de trouver les moitiés de 38 plutôt que de 28 car le chiffre des dizaines est impair. [EC_{Rmc}]
Pour certains c'est plus facile de le décomposer en nombres pairs : 20+18. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]
Ce qui donne 10+9.

Cette première partie du calcul mental expose des connaissances assez peu précises et commentées « *Pour certains c'est plus facile de le décomposer en nombres pairs.* »
La suite des EC produites a les mêmes caractéristiques que les précédentes. Pour expliquer comment prendre le quart d'un nombre, l'enseignante rappelle que le résultat est un nombre. Elle définit le quart comme la moitié de la moitié mais aussi comme la part d'un gâteau, puis, en s'appuyant sur un exemple montre une procédure pour déterminer le quart d'un nombre en s'appuyant sur les unités de numération.

Le quart c'est un nombre (Numéro d'après un élève) c'est la moitié de la moitié. [$EC_{G.}$]
Un quart c'est aussi un quart de gâteau. C'est une part. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]
Un tiers c'est multiplier par trois[77]. [EC_G] formulé par un élève mais non corrigé
Le quart de 100 c'est **couper** en 4, c'est 25. [EC_G]
Le quart de 28, c'est la moitié de 28. C'est la moitié de 8 et la moitié de deux dizaines… c'est 14. Et la moitié de 14 c'est 7. [EC_G]

Définir ce qu'est la moitié et le quart d'un nombre semble être difficile pour Solène. Elle n'ose pas donner une définition plus formelle qui pourrait être « *C'est le résultat de la division par deux de ce nombre* ». Trouver « *la moitié d'un nombre, c'est trouver le nombre qui multiplié par deux donne le nombre de départ* ». Trouver des moitiés ou des quarts de

[77] *La définition donnée est celle du triple.*

nombres n'est possible qu'à condition d'avoir de disponibles des connaissances des répertoires multiplicatifs (Voire additifs).
L'objectif de Solène est de mobiliser des connaissances sur la définition des quarts et des moitiés plus que sur le calcul mental.
Découper des bandes en deux ou quatre parts égales revient à changer de cadre (Du numérique à celui des grandeurs et mesures).
Dans la phase de recherche et la mise en commun associée, c'est ce que Solène tente de faire : montrer le lien entre calculer le quart d'un nombre et déterminer le quart d'une bande.
Ainsi, nous retrouvons parfois les mêmes EC « *Un quart c'est la moitié de la moitié* », mais cette fois-ci appliquées à une bande valant un et pliées deux fois. Un quart n'est plus un nombre mais une portion d'une unité. Une bande, c'est plusieurs quarts et c'est là l'enjeu de la suite des EC : passer à des actions sur le matériel à des écritures avec des nombres et des signes opératoires.

Pour la phase de recherche, les Ec produites sont les suivantes :

Les moitiés et les quarts de nombre sont plus petits que le nombre de départ. [EC_{rmc}]
La bande ne va pas rallonger (Si on en prend les trois quarts). [EC_{rmc}]
Un quart c'est quatre. C'est une horloge qu'on coupe en quatre (Formulation élèves)
Un quart c'est la moitié de la moitié. [EC_G]
Dans une bande il y a deux moitiés. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$]
Tu obtiens deux quarts quand tu plies deux fois ta bande [EC_{rmc}]
Quand on plie la moitié on a des quarts, on a quatre quarts. On a deux fois deux demis
Une bande unité, c'est quatre quarts. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$]
Une bande c'est aussi deux quarts et une moitié. [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$]
Un quart et trois quarts c'est un demi plus un quart. [EC_G]

2.2.3 Comparaison et analyse des deux années (1) et (3).

Du côté de la gestion globale.

La partie concernant le calcul mental, composée des passations de consignes, de l'explicitation des procédures et de la correction dure 21 minutes l'année (1) et un peu plus de 30 minutes l'année (3).
L'année (3), la phase de recherche dure 30 minutes contre 10 minutes l'année (1).
Par ailleurs le déroulement global de cette phase est la même sur les deux années. L'enseignante interroge les élèves pour qu'ils proposent une définition de ce que sont les moitiés et les quarts puis elle leur demande de calculer des moitiés et des quarts de nombres.
L'année(1) les élèves ont beaucoup de difficultés à répondre aux questions, et l'agitation est constante pendant la séance de calcul mental. Le manque de précision dans les définitions ou dans l'explicitation des procédures conduit, d'après nous, à ce climat très tendu et inversement. De plus, lors de la correction, Solène n'écrit pas au tableau, si bien que les élèves doivent à la fois répondre aux questions de Solène, corriger sans support visuel et expliciter ce qu'ils ont fait.
L'année (3) Solène passe beaucoup plus de temps à expliciter les procédures. Solène interroge ses élèves sur un calcul, ces derniers répondent sur l'ardoise, puis explicitent leurs

procédures et effacent. Ils sont alors plus attentifs que ceux de l'année (1). Ils n'expriment pas leurs difficultés à suivre la correction. Pour conclure, nous remarquerons que l'année (3) la classe est moins agitée. Solène intervient peu pour demander aux élèves de se conduire correctement.

Du côté des contenus.

L'année (3) est caractérisée par un accroissement du temps de la parole des élèves et du maître. L'année (3) nous avons noté au moins 100 interactions avec ses élèves contre 82 l'année (1). Pour autant, les EC pour l'année (3) produites sont plus contextualisées et difficiles à reconstituer car Solène ne termine jamais une phrase. Son discours est constitué de questions qu' elle assène aux élèves et de reprises de ce qu'ils disent. Le caractère diffus conduit de nouveau à des imprécisions. L'année (3) est marquée par de nombreuses répétitions des EC en variant les formulations : « *Un quart c'est la moitié* », « *Quand on plie la moitié on a des quarts.* » ou encore « *On a deux fois deux demis* ». Nous notons une confusion dans l'usage de « *la moitié* » et « *prendre la moitié de* » qui sont considérées comme des expressions équivalentes. Prendre la « *moitié de* » est plus contextualisé à l'action qui lui est associée alors que définir une moitié peut se faire sans référence à l'action.

L'année (3), elle insiste encore plus sur les méthodes pour plier la bande. Les deux procédures (voir 2.1) sont trouvées et explicitées par les élèves alors que l'année (1), seule la première procédure est mise en avant.

L'année (3), année du TBI, les EC orales de Solène ne sont pas illustrées par un écrit contrairement à l'année (1).

L'année (3) et l'année (1) ont des déroulements globaux identiques ce qui diffère c'est l'adaptation aux élèves.

Globalement les EC proposées sont ascendantes, Solène s'appuie sur ce qui est dit, produit par ses élèves et hésite voire n'apporte aucun ajout (en termes de connaissances plus formalisées)

L'année (3), elle s'appuie, lors des corrections, sur des connaissances en numération qui sont souvent mal formulées : on note des confusions entre nombres et chiffres.

Nous pouvons conclure à partir de la reconstitution des EC que les EC communes ces deux années-là sont les suivantes :

La moitié d'un nombre c'est en prendre 2 fois moins. Le quart d'un nombre c'est quatre fois moins. Enfin le quart est la moitié de la moitié.

C'est pourquoi les EC communes correspondent, pour nous à l'essentiel de ce qui est à transmettre pour Solène. Les définitions du quart correspondent à l'aspect « *opérateur des fractions.* » Solène essaie d'articuler cet aspect en l'appliquant à du matériel et en disant que le quart c'est aussi la bande pliée deux fois.

Les autres EC apparaissent au cours de la discussion si bien qu'elles ne sont pas identiques d'une année sur l'autre et de plus en plus diffuses. Nous retrouvons les caractéristiques des EC du chapitre 4 : les <u>EC produites sont discutées (produites suite à des échanges enseignant/élèves), diffuses et non étiquetées en tant que telles.</u>

Les autres différences que nous notons sont des modifications liées à la gestion de classe : telles l'utilisation de l'ardoise ou encore l'invitation faite à un nombre plus important d'élèves d'expliciter leurs procédures au tableau. L'année (1), les six groupes venaient afficher leurs procédures et 3 groupes ont pris la parole. L'année (3), les groupes sont passés un par un, il y avait 9 groupes.

Du côté de l'itinéraire cognitif nous notons des régularités : ce sont les mêmes calculs qui sont proposés, les mêmes enchainements. Ces régularités sont visibles aussi dans les mots utilisés par l'enseignante. Pour autant, l'année(3) Solène consacre plus temps à varier ses formulations. Nous nous interrogeons sur le gain pour les élèves de ces multiples reformulations.

2.3 Description et éléments d'analyse sur la partie B.

Pour les deux années, les parties A et B constituent la séance 1. La consigne telle qu'elle est donnée dans ERMEL est la suivante pour la partie B (Annexe 4 p.98) :
« *Comme vous, j'ai obtenu par pliage et découpage des morceaux de longueur égale à trois quarts de la longueur de cette bande (Le maître montre la bande de 36 cm un court instant). J'ai donné à chaque équipe l'un de ces morceaux. En utilisant ce morceau vous devez découper dans la grande bande une bande identique à la bande de départ.* »
L'année (1), Solène ne lit pas cette consigne mais la reformule deux fois jusqu'à tuer le problème : *« **Ens51** : Il te manque un quart, tu as trois quarts de ma bande …donc il te manque un quart de ma bande mais tu ne sais pas combien fait ma bande. D'accord, ça va ? Je vais vous donner à chacun, une bande plus grande que la mienne. Ce n'est pas la mienne que je vais vous donner, c'est une bande qui est beaucoup plus grande que la mienne* ».
Les élèves ont à leur disposition une bande A qui mesure trois quarts de la bande B qui est détenue par le maître. En utilisant la bande C (Plus grande que la bande B) et la bande $A=\frac{3}{4}B$. Ils doivent reconstruire la bande B. Pour les aider, les plis sur la bande A sont marqués et correspondent aux délimitations des quarts. La ressource indique : « *Cette bande a été obtenue par pliage en quatre d'une bande identique à celle du maître. Elle comporte deux plis permettant de visualiser chaque quart.* »
Ainsi les procédures possibles sont :

- Reporter A et reporter un quart de A (Raisonner en trois quarts et un quart valent 1)
- Reporter deux quarts de la bande (Soit la moitié de B) deux fois (raisonner en deux demis égalent 1)
- Reporter la moitié de B (Deux quarts de A) et deux fois un quart (Raisonner en une moitié et deux quarts valent 1).

L'année (3), elle donne la consigne ainsi *: « **ENS102 :** Alors, <u>«comme vous, j'ai obtenu par pliage une bande</u> et là vous avez une partie de la bande que vous allez devoir à faire, donc vous écoutez bien, euh j'ai obtenu des bandes égales à trois quarts de la longueur de cette bande. Voilà ma bande, vous, vous avez trois quarts de ma bande, non c'est celle-ci celle qui est déjà quadrillée[78]. Vous avez trois quarts de la bande que j'ai là. Il n'y a que moi qui l'ai. Celle-ci, il n'y a que moi qui l'ai. »* La formulation de cette consigne débute comme celle inscrite dans le livre (Partie soulignée) pour s'en détacher. Contrairement à l'année (1) elle ne tue pas le problème en exposant la procédure. En revanche, les bandes A qu'elle distribue ne laissent apparaitre aucune pliure, les quarts ne sont pas visibles. Les bandes ainsi distribuées changent complètement la nature de la tâche car pour résoudre le problème, il faut alors déterminer les <u>un tiers de la bande</u> et savoir que les un tiers des trois quarts de la bande correspondent à un quart. Puis le quart déterminé, le problème revient à celui initialement envisagé.

[78] *La bande n'est pas « quadrillée » mais on peut voir les pliures.*

L'année(3), l'activité proposée par le professeur n'est pas comprise par les élèves car Solène l'a modifiée malgré elle. Nous comprenons que l'information « *plier les bandes et faire apparaitre les plis* » donnée pas la ressource n'est pas justifiée et n'apparait pas nécessairement essentielle. Les plis marqués, la tâche peut même sembler triviale. Nous la jugeons importante car c'est une première étape dans l'instrumentalisation de la bande et dans l'entrainement au codage et au lien entre les différents registres (Du matériel en passant par l'action vers le symbolique).
Les élèves n'ont pas à disposition leur règle, donc ils ne peuvent mesurer et diviser leur mesure en 3. De plus, les élèves ne savent pas encore plier leur bande pour faire apparaitre des tiers. La manipulation est plus délicate que celle pour déterminer des moitiés de bande. Enfin, penser à déterminer les trois tiers de la bande A et savoir que ce tiers correspond à un quart de la bande B (bande unité) n'est absolument pas trivial à ce moment-là. Solène ne s'apercevra jamais de son oubli[79]. La reconstitution des EC pour cela a été rendue très difficile car Solène ne comprenait pas d'où provenaient les erreurs des élèves. Ces derniers avaient compris qu'il fallait avoir trois parts égales sur la bande A et au jugé ils ont essayé d'en évaluer plus ou moins approximativement la longueur. Selon la perception des groupes, certains ont réussi à délimiter trois parts égales puis à proposer une bande unité qui n'avait que quelques millimètres d'écart avec celle affichée au tableau. Solène interprète cette erreur comme une erreur de manipulation. Les élèves répètent le discours du professeur sur les pliages bien que cela ne corresponde pas à leurs procédures. Les travaux des élèves se répartissent en trois groupes :
-ceux qui ont reconstitué à peu près la bande unité.
-ceux qui ont un écart de plusieurs centimètres entre leur bande et celle affichée.
-ceux qui refont la même bande que celle distribuée.
Pour la validation l'année (3), les groupes d'élèves passent un par un et viennent positionner leur bande sur celle de l'enseignante. L'année (1), tous les groupes d'élèves venaient positionner leur bande à l'aide d'un aimant au tableau, si bien que tous les travaux des élèves apparaissaient. L'année (3) Solène ne peut faire cela car il est impossible, pour des raisons matérielles, sur le TNI, de positionner les bandes en les aimantant par exemple.
Le mode de gestion de la mise en commun et de la hiérarchisation des procédures change pour des raisons matérielles. Solène essaie de ne pas modifier le contenu de ces deux phases, mais il a changé pour des raisons liées à la préparation matérielle (oubli de plier les bandes) et pour des raisons de support moins adapté à la mise en commun (ou moins maitrisé). L'année (3), les élèves et l'enseignant ne parlent pas de la même activité. Le temps de recherche dépasse les 30 minutes, l'enseignante rappelle qu'une unité c'est 4 quarts, qu'il suffit d'ajouter le quart qui manque sans comprendre que la difficulté pour ses élèves est de déterminer ce quart. Les EC produites l'année (3) sont encore plus rares que lors de l'année (1) et très répétitives. Solène récite un texte qui n'est pas adapté aux problèmes que résolvent les élèves. Ces derniers essaient d'utiliser ce texte quasiment vainement.

[79] *En annexe, transcription 10, nous avons sélectionné deux photographies montrant les bandes dans les mains de Solène. (Pliées en 2011 et non pliées en 2012)*

2.3.1 Reconstitution des EC sur la partie B lors de l'année (1).

Trois quarts et un quart reforment la bande. [$EC_G \rightarrow EC_{Rmc}$] Pour reconstituer la bande, on peut plier un quart, faire apparaitre ½ , ajouter ½.[EC_{Rmc}] Un quart c'est la moitié d'un demi. [EC_G]

2.3.2 Reconstitution des EC sur la partie B lors de l'année (3).

Cette bande c'est trois fois un quart : c'est trois quarts. On s'exprime en quarts. Une bande c'est quatre quarts.

Dans le reste du discours relevé dans les transcriptions, Solène ne cesse de répéter que quatre quarts c'est trois quarts plus un quart, ou quatre quarts en montrant sa bande A qui fait apparaitre les pliages. Plusieurs élèves expriment qu'ils ne comprennent pas, Solène reprend alors toujours le même discours.
Les difficultés à produire des EC proviennent du fait que Solène a modifié l'activité malgré elle.
Solène montre ainsi à quel point elle s'attache à ce que disent ses élèves. Bien qu'elle ne comprenne pas l'origine du malentendu, elle écoute, essaie de conduire ses élèves ailleurs mais en vain. Solène exprime une certaine vigilance auprès de ses élèves mais nous montre que sa vigilance didactique n'est pas solide.

2.4 Comparaison des EC produites sur les années (1) et (3) sur la partie B : phase de conclusion

Nous avions appelé phase de conclusion cette phase qui débutait toujours par la même question : « *Qu'avez-vous appris ?* » avec parfois des variantes comme « *Qu'avez-vous fait ?* ». C'est une modalité encouragée par l'institution.
Ces deux questions étaient pour nous des indicateurs de fin de séance, identifiées également par les élèves. Cette question est l'occasion pour l'enseignante de faire une synthèse. C'est aussi pour nous une occasion de recueillir la parole des élèves en fin de séance. Les élèves ont eu des questions, des problèmes à résoudre. Il s'agit pour eux de connaitre maintenant quel est leur gain en termes d'apprentissage. Le fait que la question leur soit posée peut être considéré comme l'expression de la prise en charge de trois contraintes de niveaux différents.
-l'enseignante exprime ainsi sa difficulté à changer de posture, à s'autoriser à dire ce qu'il y avait de nouveau.
-l'enseignante continue de vouloir mobiliser ses élèves, de les rendre « *responsables* » de leur apprentissage et d'assurer la paix sociale lors de ces fins de séances souvent difficiles à gérer.
-l'enseignante essaie à chaud d'effectuer un bilan sur l'état des connaissances déclarées par les élèves et il espère trouver un moyen à chaud de reformuler voire d'évacuer ce qui a été mal interprété.
Margolinas (1992) décrit les difficultés de gestion liées entre autres à la décontextualisation de ces phases qualifiées de nécessairement didactiques. Margolinas (op.cit) définit ainsi les phases de conclusion : « *J'appelle phase de conclusion la phase au cours de laquelle l'élève*

accède à une information sur la validité de sa réponse. Cette information doit être pertinente du point de vue du problème et du savoir. La phase de conclusion est sous la responsabilité du maître »
Mounier (2013) étudie aussi ces moments particuliers qu'il requalifiera de « *phases de bouclage* ». Mounier prend en compte les contraintes du métier et la nécessité de terminer, de boucler une séance. Il distingue deux phases de bouclages :

> « *La phase de bouclage est menée en classe par un enseignant dans un temps limité, sur une durée d'un seul tenant. Elle comprend nécessairement une (ou une série) de tâche(s) soumise(s) antérieurement aux élèves. La tâche que l'enseignant s'est redéfinie consiste à faire un lien entre le travail réalisé par les élèves et la première mise en forme du savoir nouveau. Deux niveaux de bouclage sont en jeu : l'un concerne l'accès à la validité des procédures et des réponses des élèves à une (ou une série) de tâche(s) et l'autre concerne la première mise en forme du savoir.* » (Mounier 2013 p 96)

Ce que nous appelons phase de conclusion se rapproche de la définition proposée par Mounier pour le deuxième niveau de bouclage.

2.4.1 Les phases de conclusion : qu'avez-vous appris ? : Du côté des élèves.

Solène pose la question, l'année (1) et l'année (3) « *Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?* ».
La séance a duré 1h30 l'année (3) contre 50 minutes l'année (1) d'après le même déroulement. L'année (3), la séance a duré deux fois plus de temps.
L'année (1), les réponses seront plus centrées sur l'instrumentalisation « *implicite* »[80] de la bande : une élève répond « *qu'avec une bande plus courte et plus longue, on arrive à refaire une bande* ». Cette élève n'arrive pas à formuler ce qu'elle a appris par rapport aux mathématiques et peut difficilement s'appuyer sur un discours prononcé par le professeur.
Les réponses des élèves sont plutôt du côté des mots et des liens qu'ils semblent avoir faits entre les quarts et les bandes.
Tout le long de la séance, les proximités horizontales (Robert, 2015) ont été de mises. Nous voyons ainsi les limites de ces dernières. Elles ont l'ambition de rester proches des élèves mais ont comme désavantage de ne pas accompagner les élèves vers un niveau de formulation supérieure. Ce saut qui n'est pas réalisé est un vrai frein pour nous à la décontextualisation.
Nous comprenons alors que généraliser, sortir du contexte s'accompagne nécessairement d'un autre niveau de formulation : comprendre que la bande n'est qu'un prétexte pour montrer que 1 c'est aussi quatre quarts et que cela s'écrit $1= 4x\frac{1}{4}$. Ce saut, cette montée en généralité et en formalisme ne peut se faire que par l'action[81] du professeur.
L'année (3) les élèves répondent à la question « *Qu'avez-vous fait ?* »

[80] *Implicite car ce n'est pas l'objectif de la séance et au regard de nos données nous ne pouvons pas assurer que cela n'est pas non plus implicite du côté du professeur.*

[81] *Au sens très large du terme, cela prend en compte ce que dit le maître, ce qu'il écrit et ce qu'il fait avec le matériel.*

Mathis : Des quarts
ENS116 : Des quarts, des bandes. Indira tu peux écouter ? Euh … Tu as entendu la question Whesley ? Alors tu réponds à la question ?
Whesley :…Demi, des bandes ?

Les réponses des élèves sont évasives et conduisent à penser qu'il y a un lien à effectuer entre le quart et les bandes. Solène n'insiste pas sur la conclusion, la séance ayant duré très longtemps. L'activité proposée, modifiée malgré l'enseignante était trop éloignée de ce que les élèves savaient faire. Les réponses de l'enseignante ne répondaient pas à leur problématique « *déterminer le tiers de la bande* » puisqu'elle répondait à la question « *combien manque-t-il à une bande qui mesure trois quarts pour faire quatre quarts ?* »

2.4.2 Qu'avez-vous appris ? : du côté du maître.

L'année (1), l'enseignante reformule en axant sur les procédures appelées « *stratégies* » : « *Les deux stratégies qui ont été utilisées pour faire le travail c'est de rajouter un quart, deuxième stratégie…d'utiliser la moitié, de reproduire la moitié pour obtenir ma bande* ». L'énoncé produit pour décrire les procédures reste partiel : « *pour faire le travail* », il fallait « *ajouter un quart sans préciser à quoi on rajoute un quart* ». La réponse de l'enseignante glisse sur une technique « *On pouvait utiliser la moitié, de reproduire la moitié pour obtenir ma bande* ». L'évocation de l'unité n'est jamais faite explicitement.
Cette phrase de conclusion est improvisée, Solène explique qu'elle s'appuie sur les mots des élèves pour ne pas les « *perdre* » (lu le 19/05/2015 et approuvé). Cette remarque appuie nos conclusions précédentes, Solène n'ose pas dépasser ou ne sait pas comment faire pour aller au-delà de ces proximités horizontales.
L'année(3), l'enseignante reste dans son discours au niveau de l'action :

***ENS118** :* Ce sont des fractions, on a appris à plier des bandes pour obtenir des quarts, des trois quarts dans une bande plus plusieurs fractions permettent de reconstituer une bande entière d'accord.

La conclusion est un peu à l'image de la séance, extrêmement floue ne répondant pas à la question posée par le problème qui était de reconstituer la bande unité (qui vaut 1). Ce qu'elle nommait de « *stratégies* »[82] qui induisaient des égalités du type $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ ne sont pas évoquées et pour cause les élèves ne faisaient pas le même problème que le professeur.
L'année (1) la conclusion n'offrait pas un degré de généralité, ni ne mettait en évidence les connaissances en jeu, cependant, la phase de conclusion répondait à l'activité des élèves.
L'année (3), l'enseignant et les élèves ne peuvent s'entendre et cela joue un rôle dans la production des EC.
Pour autant, l'année (3), nous ne constatons pas d'effet Jourdain[83] ou Topaze [84].

[82] *Qui sont pour nous des procédures.*

[83] *L'enseignant admet de reconnaître dans les comportements ou réponses des élèves des indices de connaissances savantes.*

[84] *L'enseignant donne à l'élève la réponse de manière détournée.*

La volonté de l'enseignante, pour nous, n'est pas d'entendre ou de faire dire à ses élèves ce qu'elle a envie d'entendre pour faire avancer le temps didactique. Elle se place plutôt du côté des aménagements de ce qu'elle a dire pour rester proches de ces élèves. Ses pratiques la conduisent à produire de nombreuses proximités horizontales, ascendantes, rarement descendantes car elle est nécessairement à l'écoute des élèves et n'ose pas interpréter ni s'autoriser à faire formuler à un autre niveau.
D'un point de vue théorique nous nous demandons comment gérer ces phases de conclusions en restant proche de la zone proximale de développement des élèves tout en enrichissant leurs connaissances. Comment alors communiquer sans prendre en compte une part d'implicite et d'interprétation ? Comment favoriser les mouvements ascendants et descendants ?

3 Comparaison des EC orales produites pour la partie E, année (1), (2) et (3)

L'analyse a priori de cette partie est proposée dans le chapitre 4, partie II, paragraphe 3.1.
Cette activité est l'une de celles dont nous avons les films pour les 3 années consécutives.
L'année (1), la partie E succède à la lecture de la leçon écrite, puis à une phase de rappel provoquée.
L'année (2) et (3) cette partie succède à une phase de rappel provoquée. L'année (2) la partie E est la première séance de l'année sur les fractions. Pour les années (1) et (3), la partie E correspond à la deuxième séance.
Les années (1) et (2) la séance dure environ 50 minutes alors que l'année (3) la séance dure un peu moins de 40 minutes.
Nous allons détailler pour les années (1) et (3) un peu plus les déroulements et les modalités de gestion car ils ont un impact sur la production des EC. Nous ne ferons que des rappels pour l'année (2).

3.1 Comparaison des EC produites sur les trois années.

Dans ces paragraphes nous voulons montrer en quoi les variations autour des consignes, des déroulements et de la validation ont un impact sur les phases de conclusion et les EC produites. Le tableau des EC écrites pour l'année (2) est dans le chapitre 4 paragraphe 7 (annexe 5 p101) , les tableaux des EC orales pour les autres années sont essentiellement dans le chapitre 5.

3.1.1 Comparaison de la passation des consignes.

Nous rappelons la consigne telle qu'elle est donnée dans la ressource : « *On souhaite **fabriquer** une bande de même longueur que la bande de départ en utilisant ces quatre morceaux.* ($\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$)
On peut ne pas utiliser tous les morceaux, on peut utiliser plusieurs fois le même morceau. Trouvez au moins quatre façons de procéder. »

L'année (1), cette consigne est donnée ainsi : *« **ENS46 :** maintenant, on fait un travail de groupe. Je vais vous donner, **j'**enlève **ma** bande de référence. On écoute Emma ! Agathe **tu** écoutes. Vous avez 4 morceaux, un quart, deux huitièmes, trois huitièmes, un demi ;*
On va attendre 2 minutes. Vous allez avoir 4 morceaux, vous allez fabriquer une bande égale à ma bande de référence. Première chose vous écoutez la consigne jusqu'au bout.
On peut ne pas utiliser tous les morceaux par contre on peut utiliser plusieurs fois les mêmes morceaux. »
La consigne est entrecoupée de remarques permettant de recadrer les élèves. Solène fait remarquer qu'elle ne peut pas formuler la consigne d'une traite. Lors de la dévolution de la situation, Solène a recours à des pronoms personnels « *vous, je* » qui est pour elle, une stratégie pour impliquer ces élèves. Solène enrôle les élèves de telle manière que les enjeux d'apprentissage paraissent devenir des enjeux quasi personnels. C'est une des modalités décrites par Butlen et al (2012) pour obtenir la paix scolaire.
En outre, elle spécifie les modalités de travail entre les élèves dès le début de la passation de la consigne ce qui génère immédiatement des commentaires quant à la constitution des dits groupes. Enfin lors de la passation des consignes « *La bande de départ* » (dans ERMEL) devient la bande de référence.
L'année (1), Solène ne donne pas la contrainte suivante : « *trouver* » quatre façons de procéder alors que cela permettait d'additionner des fractions dont les dénominateurs étaient différents. L'absence de passation de cette contrainte[85] peut avoir un rôle sur la production des EC puisque cette contrainte a un rôle à jouer dans la production de la diversité des résultats. Au moment de la mise en commun, Solène rappelle qu'il faut proposer 4 possibilités différentes alors que cela n'avait jamais été dit.
Enfin, Solène affiche au tableau les bandes de différentes longueurs mais n'affiche pas la bande unité. Pour « *résoudre* » le problème les élèves en groupes de 4, ont à leur disposition les bandes de 4 longueurs différentes mais n'ont pas la bande unité.
Dans le paragraphe précèdent, nous avons montré comment un oubli de « *pliage* » modifiait la tâche. Nous montrons maintenant que l'absence de prise en compte d'une contrainte du professeur modifie l'activité, celle-ci se réalisant alors a-minima. En effet les élèves peuvent produire deux ou trois sommes différentes ayant des dénominateurs égaux (somme des demis, des quarts et des huitièmes.) sans avoir à utiliser des fractions équivalentes pour calculer leur somme.

L'année (2) la consigne est donnée ainsi : « ***ENS29 :*** *vous avez une bande unité, des demis, un quart ; deux huitièmes et trois huitièmes. (11'25). Maintenant, vous allez vous mettre par*

[85] *Voir analyse a priori p…chapitre 4*

deux pour faire le travail que je vais vous présenter. Je veux que vous utilisiez ces demis, ces quarts, ces deux huitièmes et ces trois huitièmes en associant plusieurs morceaux. Je veux que vous reconstituiez la bande unité de départ. Il y a plusieurs possibilités. »
La consigne est donnée d'une traite sans aucune interruption de la part des élèves contrairement à l'année (1) et (3). Solène ne dit pas tout de suite que les élèves peuvent utiliser plusieurs fois le même « *morceau* ».
Dans cette consigne, elle précise la longueur des différentes bandes : deux huitièmes, trois huitièmes. Elle ajoute que la bande de départ est la bande unité. Elle n'utilise plus le mot « *bande de référence* ». Solène montre en utilisant le mot « *bande unité* » une volonté de rappeler la « *valeur de la bande de départ* ». Cette enseignante semble emprunter cette désignation à l'ouvrage Cap Math qu'elle a utilisé les années précédentes. Comme l'année(1) Solène expose les bandes de différentes longueurs au tableau mais contrairement à l'année (1) elle affiche également la bande unité. Solène n'impose pas non plus la contrainte des 4 productions d'égalité différentes. Elle modifie les modalités de travail en groupe et autorise des groupes de 2 au lieu de groupes de 4 exclusivement l'année (1). Enfin, les élèves n'ont plus à leur disposition le matériel : c'est-à-dire les 4 bandes de longueurs différentes.

<u>L'année (3), la consigne est donnée ainsi</u> :
« *Ma bande unité de départ, je n'y ai pas touché. Je vais vous demander de reconstituer une bande unité de départ en utilisant ces fractions-là. (Elle montre les bandes affichées au tableau), en utilisant plusieurs fois la même. Mais non, ne découpe pas tu vas devoir utiliser des fractions et les additionner pour retrouver la bande unité///Chloé Stop///*
Vous allez utiliser ces fractions pour reconstituer la bande. Il y a beaucoup de possibilités, mais vous n'avez pas le droit d'utiliser d'autres fractions. Vous allez la reconstituer. »

L'année (3) comme l'année (1), la consigne est entrecoupée par des remarques des élèves, des rappels à l'ordre. La bande unité devient la bande unité de départ, empruntant ainsi à la consigne de la ressource (de départ) et au manuel (unité). La lecture des quatre fractions n'est pas faite, les 4 bandes sont seulement désignées d'un geste de la main. La contrainte sur les 4 productions d'égalité différentes n'est toujours pas formulée. Cette année-là, elle ne précise pas immédiatement les modalités de travail à deux.
Dans cette consigne, Solène de nouveau utilise un langage mixte « *Vous allez additionner des fractions* » pour retrouver « *la bande unité* » ce qui revient à additionner des nombres pour

reconstituer un objet. Elle poursuit en généralisant « *Vous allez utiliser ces fractions pour reconstituer la bande.* ». Les élèves n'ont pas à leur disposition les bandes ni pour la phase de recherche ni pour la validation.

3.1.2 Synthèse sur les variations autour des consignes

Nous mettons l'accent sur les variations, pour autant nous notons des régularités. Celles-ci sont du côté global à la fois sur l'itinéraire cognitif et du côté des déroulements.
D'autres régularités du côté micro ou local apparaissent. C'est ainsi qu'une des régularités que nous avons relevées est liée à la disposition des 4 bandes. Les bandes 2/8 et ¼ sont toujours l'une à côté de l'autre si bien que les élèves voient qu'elles ont la même mesure. Cette juxtaposition des deux bandes tue en partie le problème, mais c'est aussi une contribution implicite à une EC. L'année (3) Solène dira à ses élèves : « ***ENS :*** *oui mais là c'est juste puisque dès le départ vous avez remarqué que un quart c'est comme deux huitièmes* ». Effectivement, immédiatement les élèves « *voient* » que les bandes produites à partir de la même unité de référence sont identiques et concluent assez naturellement que 2/8u=1/4u.
La variabilité essentielle que nous notons lors de la passation des consignes est l'instabilité du vocabulaire pour désigner la bande. La ressource propose de désigner la bande par : <u>bande de départ.</u> Solène, chaque année, voire au cours d'une séance modifie l'expression qui désigne cette bande : elle l'appellera <u>bande de référence</u> ou <u>bande unité année (1) et (2)</u> pour finir par la désigner comme une <u>bande unité de départ (année (3))</u>. Nous supposons que le terme de bande unité lui convient mieux car embarque l'idée que cette bande a une valeur. Pour autant elle ne dit jamais que cette « *bande-unité* » peut valoir « *un* » dans le cas d'un simple report.
Solène ne retient pas la contrainte pourtant essentielle, de produire 4 façons différentes de reconstituer la bande unité. Le risque est pris de passer à côté de l'activité. Notre connaissance du premier degré, nous permet d'avancer que cette contrainte est transparente pour l'enseignante. En effet, dans les consignes des ressources, le nombre de procédures ou de solutions à apporter est souvent un « *moyen* » de différenciation. Plus les élèves sont qualifiés de « *doués* » plus ils ont de travail à fournir. C'est l'accumulation des tâches qui est comprise comme la variable de différenciation.
Nous avons vérifié auprès de Solène cette explication (discussion du 10 Juillet 2015). Effectivement cette contrainte a été prise pour une variable de différenciation. Cela aussi nous conduit à affirmer que l'analyse a priori d'une situation ne fait pas partie des gestes professionnels de Solène.
Nous notons également des variabilités autour de la gestion de la classe. L'année (1) les élèves travaillaient en groupes de 4, l'année (2) et (3) en groupes de 2.
L'année (1), les élèves bruyants, munis de leur bande exécutent rapidement ce qui leur est demandé. Seule l'année (2), l'année du passage de l'examen de l'enseignante, les élèves écoutent la consigne sans interrompre l'enseignante. Enfin, L'année (3), l'écart est si important entre la consigne de la ressource et ce qui est formulé par Solène que la consigne devient difficilement compréhensible. Solène est alors contrainte de reformuler plusieurs fois, les élèves n'arrivent pas à se mettre immédiatement au travail. Pour autant la classe est plus calme que l'année (1).[86]

[86] Les élèves ne se lèvent pas, ne crient pas, n'interpellent pas l'enseignante comme l'année (1).

Nous envisageons que cette difficulté à formuler au plus juste soit une manifestation de l'obsolescence des situations (chapitre 4 paragaphe 2). Lors de notre discussion du 10 Juillet 2015, Solène rappelle ce qu'elle nous a déjà livré, d'après elle : « *Les consignes du ERMEL sont trop longues et peu claires, je suis souvent obligée de les reformuler.* ». Elle explique qu'elle connait si bien les séances qu'elle s'attend à certaines réactions, qu'elle peut anticiper des procédures.

Pour conclure, nous avons avancé dans le chapitre 1 que le Processus d'Institutionnalisation débutait dès la dévolution. Dans les exemples que nous donnons, sans réduire la dévolution à la passation des consignes, nous pouvons voir que la formulation des consignes a un impact sur les EC et le Processus d'Institutionnalisation. En effet, l'instabilité du vocabulaire pour désigner la bande peut s'expliquer d'une part par l'utilisation de deux ressources (qui n'usent pas du même vocabulaire) et d'autre part par la prise en compte des formulations élèves. Solène souhaite rester proche de ses élèves. Cette proximité se manifeste par et grâce au langage. L'apport du professeur n'est pas nécessairement visible au niveau du vocabulaire ni des contraintes de travail. Les enjeux des problèmes ne sont pas nécessairement bien posés si bien qu'il est difficile de savoir à quel jeu on joue. Faut-il juste juxtaposer des bandes ? Alors les EC produites décriront les actions.

Faut-il établir des sommes de fractions de dénominateurs différents ? Mais, alors quels sont les objectifs des EC produites ?

Ou encore s'agit-il de montrer que plusieurs sommes de fractions valent un ? Ou Déduire une règle sur les sommes de fractions ? Ou enfin d'utiliser des fractions équivalentes ?

La question posée par le problème et la réponse donnée en cours de la séance et surtout lors de la phase de conclusion, nous amènent à formuler des alternatives. Une distance trop petite entre le problème et la réponse ne permet pas de voir ce qui était en jeu : elle n'a pas engagé les élèves sur du nouveau. Au contraire, une distance trop grande empêcherait la construction du savoir parce que le « *lien* » ne se ferait pas. Il s'agit de trouver la bonne distance entre la dévolution et l'institutionnalisation.

3.1.3 Variation autour de la validation.

L'année (1), les élèves ont à disposition les 4 bandes. Les élèves trouvent très rapidement des solutions. Solène demande aux plus rapides de chercher d'autres possibilités.

La validation proposée par Solène a un côté théâtral qui permet de retrouver le silence.

Solène affiche la bande unité et leur dit :

« ***ENS59*** *: Alors, je prends ma bande… Vous l'avez rendue Samuel et Emma ? Alors maintenant, vous allez regarder. Nous allons regarder si vous avez bien obtenu ma bande. (La bande est affichée au tableau)* »

Les groupes passent au tableau et juxtaposent leurs bandes de longueurs différentes et valident par comparaison avec la bande unité si leurs propositions sont correctes. Tous les groupes sont en réussite : ils proposent une possibilité et non quatre.

La mise en commun permet de montrer 5 égalités différentes égales à 1 (contre les 10 qu'il est possible de trouver). Ces égalités ne sont pas nécessairement produites sous forme de somme mais montrées en juxtaposant les bandes.

Photographie du tableau à l'issue de la mise en commun : année (1)

L'année (2), la validation ne se fait pas en prenant appui sur le matériel. Solène écrit ce que lui disent les élèves. La validation est réalisée par le maître et le reste du groupe classe. Neuf sommes de fractions égales à 1 sont écrites au tableau.

Photographie du tableau à l'issue de la mise en commun : année (2)

L'année (3) suit le même scénario que l'année (2), mais seulement 7 égalités sont produites dont3 avec le même dénominateur (somme des moitiés, somme des quarts, et somme des huitièmes). Solène écrit sur le TBI ce que disent les élèves.
La validation est prise en charge par l'enseignante. Elle valide ou non les sommes écrites au tableau.
Ces trois années-là, parfois, Solène écrit que les sommes valent 1, parfois non.
Les EC produites sont de natures différentes selon que la validation est faite avec le matériel ou en posant des sommes de fractions.

3.1.4 Variation autour des conclusions.

Nous faisons le choix de ne pas reconstituer les EC mais de montrer les données brutes extraites des transcriptions.

L'année (1) la discussion s'engage sur le nombre de solutions (Au nombre de6 mais une a été donnée deux fois). L'EC produite par l'enseignante est « *On peut utiliser plusieurs fractions pour reconstituer une bande référence* ». Elle ne peut pas répondre vraiment aux questions sur le nombre de possibilités car elles ne sont pas exposées dans la ressource et Solène ne les a pas cherchées.
Transcription 2 des annexes (p 17)

ENS61 : On peut utiliser plusieurs fractions pour reconstituer une bande référence, d'accord, ici il y en a six mais je suppose qu'il y en a d'autres. Tu veux rajouter quelque chose par rapport à ce qu'on a vu aujourd'hui.

Morgane : Non mais c'est pour dire, faire une unité, il y a beaucoup plus de choix que 3 méthodes. **ENS62** : Non, oui, on a utilisé que 4 bandes de fractions bouts de fractions, si j'avais rajouté 1/8 en fraction on aurait multiplié le nombre de possibilités pour reconstituer la bande unité. **Marvin** : Par contre si on a le droit à une seule fois une bande ; **ENS 63**: Si tu as le droit à une seule bande tu n'as pas beaucoup de possibilités. Y a la troisième, non que la troisième.

L'année[87] **(2),** Caroline, élève en difficulté, vient de comprendre qu'elle avait construit une unité. Paul exprime un autre enjeu possible de la situation : la possibilité d'additionner des fractions qui ne sont pas du même dénominateur. C'est l'enseignante qui recontextualise et révoque le matériel pour produire une EC *« Reconstituer une unité dépend de la manière dont est découpé le nombre de parts que tu vas utiliser.»* A notre sens, cette EC est peu compréhensible même en contexte.

<u>Phase de conclusion : transcription 3 des annexes (p23)</u>

ENS74 : Ç<u>a c'est l'affichage</u>. On va récapituler un petit peu. Qui est-ce qui peut, qu'est-ce qu'il faut retenir aujourd'hui ? <u>Qu'est-ce que vous avez appris ou revu par rapport à l'an passé ? Caroline ?</u> **Caroline** : Construire la même unité […] **ENS76** : Oui, Paul, il est en train de dire que pour reconstituer une unité, on peut la reconstituer en faisant une somme de fractions qui n'ont pas nécessairement le même dénominateur **Paul** : Ni le numérateur **ENS77** : Oui ça va dépendre de la manière dont est découpé le nombre de part que tu vas utiliser. Ça va pour tout le monde ? On s'arrête là et la prochaine fois on va poursuivre avec des fractions et des unités de longueurs.

L'année 3**,** il semble y avoir si peu de mathématiques en jeu que l'EC produite par Solène nous pose des problèmes pour sa reconstitution. Solène ne parle pas d'addition ou de sommes mais d' « utilisation » des fractions. Elle désigne alors la bande de référence comme la bande unité initiale.

Transcription 13 (p77) des annexes.

ENS28 : Que fallait-il retenir, que pouvez-vous conclure ? **Elève** : il y a plusieurs manières de reconstituer une bande unité. **ENS29 :** Y a plusieurs façons d'utiliser des fractions pour reconstituer une bande unité en utilisant les fractions ou les parties d'une fraction qui ont été reconstruites à partir de la bande unité initiale.

[87] *Nous avons détaillé cette partie là dans le chapitre 4.*

3.1.5 *Synthèse.*

Nous retrouvons nos résultats sur la présence de proximités horizontales et sur les phases de conclusion différentes selon les trois années. Cette comparaison renforce les interrogations que nous avons formulées dans la partie sur les variations des consignes.
À quel jeu joue-t-on ? Quels sont les apprentissages effectifs ? Qu'est-ce qui empêche le maître d'enrichir ce qui est dit ?
Les phases de conclusion ne semblent pas répondre aux mêmes problématiques pour Solène. L'année (1), année de la découverte du projet pour Solène, l'enseignante semble s'intéresser en premier lieu aux expositions des procédures. L'année (2) sous l'impulsion de deux élèves et dans une classe dont le climat est apaisé, les EC empruntent le chemin des mathématiques. L'année (3), c'est l'année du « *flou* », les erreurs et imprécisions sont plus fréquentes, le recours au langage mathématique (vocabulaire et formalisme) est quasi absent. C'est seulement l'année (2), parce que Solène s'adresse à Paul que l'enseignante dit qu'ils ont fait <u>des sommes</u> de fractions, l'année (1) elle parle de fractions qui permettent de <u>reconstituer des bandes</u>, l'année (3) <u>d'utiliser des fractions pour reconstruire une bande unité initiale.</u>
Les reformulations du professeur sont parfois moins précises que celles des élèves. L'intention de Solène est sûrement de ménager des proximités discursives avec ses élèves et adaptées aux élèves auxquels elle s'adresse. La pratique de Solène prend bien en compte la dimension sociale de l'apprentissage (dans les interactions) mais les apports de connaissances du professeur qui concourent à la dimension cognitive du PI sont peu ou pas pris en compte.

3.2 <u>*Variations des EC sur la partie E pendant trois années consécutives.*</u>

Dans les paragraphes précédents, nous avons décrit et comparé les consignes, les phases de validations et les phases de conclusions. Nous avons fait des choix et montré ce qui différait d'une année sur l'autre.
Ce dernier paragraphe va nous permettre de montrer les EC produites sur cette séance au regard des descriptions réalisées.
Description globale des séances :
L'année (1), Solène, dans le temps imparti d'une séance (50 minutes) peut lire la leçon écrite, gérer une phase de rappel provoquée (Proposée par ailleurs par la ressource) et proposer la recherche. Les années (2) et (3) seules les phases de rappel provoquées et la recherche font l'objet de la séance. L'année (3) la séance dure moins de 40 minutes. Nous ne comparons que les EC de la phase de rappel provoquée à la phase de conclusion qui traitent de la partie E.

3.2.1 *Les EC produites à l'oral lors de la phase de rappel l'année(1)*

La phase de rappel provoquée est l'occasion de mobiliser les connaissances antérieures.
Cette phase de rappel, dont le déroulement global est le même sur les trois années consécutives permet :
- d'identifier la bande de référence comme l'unité. (Sans établir que cette bande de référence vaut 1 dans le travail à venir.)
- de revenir sur des règles de lecture des fractions (À partir de quelques exemples isolés)
- de rappeler quelques EC données lors de la séance précédente.

Cette phase conduit les élèves à construire des égalités qui permettent de montrer que lorsque le numérateur a la même valeur que le dénominateur, alors la fraction est égale à 1. L'enseignante égraine les exemples sans aller jusqu'à proposer une règle généralisée. Pour autant nous pouvons y voir une montée en généralisation par une accumulation d'exemples. Solène demande combien il y a de moitiés, quarts, huitièmes et seizièmes dans une unité.
Exemple : Année (1)

Luna : Des huitièmes
Ens12 : Ça veut dire que l'unité est découpée en … ?
Elève : 8

Elle finit par conclure sans que cela soit écrit dans le cours, la règle suivante :
« *Quand vous avez le même nombre au dénominateur et au numérateur vous avez une unité* ».
Lors de la lecture des fractions dans la leçon écrite. Nous notons quelques digressions qui montent des difficultés du professeur à mettre en forme ses cours et des interrogations que cela suscite chez les élèves.

Gaël : Mais sur la feuille la barre est penchée.
Ens30 : Oui car sur mon ordi je n'arrive pas à le faire.

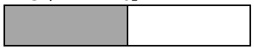
Une autre intervention du même élève retient notre attention. Ce dernier s'étonne de rencontrer des définitions en mathématique. L'enseignante lui explique qu'en mathématique, il y en a aussi comme en géographie. En géographie, Solène donne beaucoup de définitions à apprendre par cœur comme « *plateau, plaine, crique….* ». Gaël est un élève très actif et sans difficulté particulière. Cette remarque nous interroge par rapport à la représentation des mathématiques de cet élève : les mathématiques apparaissent comme une science sans définition.
Si nous devions convaincre que les EC doivent être constitutives des apprentissages, notamment quand elles ont un degré de généralité importante, nous trouverions là un argument. Est-il possible en fin de scolarité de penser que les mathématiques ne se réalisent que dans l'action ?

3.2.2 Les EC reconstituées pour l'année (1)

Quand le nombre au dénominateur et au numérateur est le même alors vous avez une unité. [EC_G]
En pliant en deux on obtient une bande qui vaut un demi. Plier encore la bande en deux permet d'obtenir des quarts. [EC_{rmc}]
Deux bandes de un demi refont la bande de référence. [EC_{rmc}]
$\frac{2}{8}$et $\frac{2}{8}$plus $\frac{2}{8}$plus $\frac{2}{8}$font $\frac{8}{8}$. [EC_G]
$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$plus $\frac{1}{2}$ font une unité. [EC_G]
$\frac{3}{8}$, et $\frac{3}{8}$plus $\frac{2}{8}$ égalent $\frac{8}{8}$, égalent une unité la référence un. [EC_G]
on peut utiliser plusieurs fractions pour reconstituer une bande référence. [$EC_{G \rightarrow} EC_{rmc}$]

Le nombre d'EC est assez limité. Dans le discours alternent des EC générales et des EC s'appuyant sur des exemples. Nous retrouvons cette diversité de désignation de la bande : bande unité, bande de référence, unité de référence.

3.2.3 Rappel des EC reconstituées pour l'année (2)

<table>
<tr><td colspan="2">Une fraction c'est des quarts et des doubles [$EC_{G} \rightarrow EC_{Rmc}$]
Une fraction c'est un nombre [EC_{G}]
Une fraction s'écrit $\frac{1}{4}$ et non $\frac{1}{4}$. [$EC_{G \rightarrow Rmc}$]
$\frac{1}{2}$ est une fraction [$EC_{rmc} \rightarrow EC_{G}$]
Une fraction peut se représenter [$EC_{G} \rightarrow EC_{Rmc}$]

Pour obtenir des $\frac{1}{2}$ unités, il faut plier la bande en deux (Les deux extrémités doivent se toucher). (énoncé de méthode permettant d'obtenir deux moitiés)
La bande s'appelle la bande unité. (définition)
Dans une unité il y a 4 quarts.(EC_{G})
Un quart ça se voit sur une bande pliée deux fois. ($EC_{G} \rightarrow EC_{Rmc}$)</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}$ c'est $\frac{2}{8}$
$1=2x\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$</td><td>$\frac{1}{2}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$
$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=1$ (c'est faux non relevé par l'enseignante)

$\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$
$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{8}{8}=1$

$\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=4x\frac{2}{8}=1$
(EC_{G})</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'unité c'est une bande coupée en x morceaux [$EC_{G} \rightarrow EC_{Rmc}$] pour avoir une fraction on prend un certain nombre de parts. C'est un nombre [EC_{G}]
Le nombre du haut s'appelle le numérateur [EC_{G}]
Le nombre du bas le dénominateur [EC_{G}]
Le dénominateur correspond aux nombres de parts [$EC_{G} \rightarrow EC_{Rmc}$]
La moitié c'est une unité coupée en deux [$EC_{G} \rightarrow EC_{Rmc}$]
Il y a des égalités, des correspondances entre les fractions ([$EC_{G} \rightarrow EC_{Rmc}$] voir affichage ainsi que les égalités produites au tableau) : Les EC sont des exemples trouvés à la suite de la recherche.
Une unité peut être égale à plusieurs fractions [EC_{G}] décomposer c'est la somme des fractions (Définition assez générale du sens donné à « décomposer »). On peut faire une somme de fractions dont les dénominateurs sont différents [EC_{G}]</td></tr>
</table>

L'année(2) le nombre d'EC est bien plus important que l'année précédente. Le discours est plus structuré. En début de séance, l'enseignant formule ces EC en se référant au matériel, puis propose des égalités et tente dans la mise en commun et la conclusion de montrer le savoir en jeu en décontextualisant. Les passages des différents registres (action /matériel) au registre numérique sont pris en charge par le professeur.

L'enseignante, l'année (2) connait les déroulements, la paix scolaire est stabilisée ce qui lui laisse la possibilité de transmettre un peu plus de mathématiques.

3.2.4 Les EC reconstituées pour l'année(3)

L'année (3), dès la phase de rappel, la difficulté pour nous à extraire des EC est présente. Le cours débute en demandant aux élèves ce qu'ils ont fait et non ce qu'ils ont appris. L'enseignante reformule une réponse d'élèves : « ***ENS2 :*** *Oui tu avais une bande unité, il fallait mettre en gris ou faire des croix de différentes fractions il y avait effectivement trois quarts, dans des bandes mais pas seulement.* »
L'EC reconstituée correspondante pourrait être : un quart plus trois quarts c'est la bande unité.
Mais nous nous éloignons de ce qui a été formulé en retirant l'évocation de la tâche « *mettre en gris, faire des croix* »
La phase de rappel est, au mieux, ici, un rappel de l'activité réalisée la séance précédente sans mettre en relief des connaissances.

ENS 1 : Qu'est-ce qu'on a fait la dernière fois sur les fractions ?
Élève : On a fait des quarts et des trois quarts.
ENS2 : Qu'est ce qui fallait faire, c'est un exercice d'entrainement, qu'est-ce qu'il t'était demandé ? Ludine.
Ludine : Fallait trouver dans une bande trois quarts
ENS3 : Oui tu avais une bande unité, il fallait mettre en gris ou faire des croix de différentes fractions, il y avait effectivement trois quarts, dans des bandes, mais pas seulement. »
Par ailleurs, pour compliquer notre tâche de reconstitution, les élèves s'agitent vite car souhaitent savoir s'ils vont travailler en groupes et pouvoir ainsi choisir leurs partenaires :
Elève : C'est un travail de groupe ?
ENS 4: Oui
Dan : Avec des personnes de choix ou pas ?
ENS 5: Tu verras Dan. C'est d'abord un travail collectif puis à deux.

Ces remarques montrent que la paix sociale est tout juste assurée et que la paix scolaire n'est pas acquise. Nos difficultés à traquer les EC nous interpellent. Comment font les élèves, sur quoi peuvent-ils s'appuyer ? Que retiennent-ils ?
Pour autant, nous proposons la reconstitution suivante qui est parfois moins fidèle (Moins proche de ce qui est dit).

Un quart plus trois quarts, c'est la bande unité. [$EC_{G}\rightarrow E_{Rmc}$]
Plier en deux et en deux permet d'obtenir des quarts. [$EC_{rmc}\rightarrow E_{G}$] Replier en deux permet d'obtenir des huitièmes. [$EC_{rmc}\rightarrow EC_{G}$] Dans une bande il y a 8 huitièmes, huit morceaux de même longueur. [EC_{rmc}]
$\frac{1}{4}$ c'est comme $\frac{2}{8}$ EC_{G}]
8 c'est le nombre de parts de l'unité. .[EC_{G}]
La bande unité est découpée en huit morceaux le nombre du dessus c'est 8. Dans 2/8 le deux te montre le nombre de morceaux qu'il faut prendre. [$EC_{rmc}\rightarrow EC_{G}$]
Trois huitièmes plus trois huitièmes ça fait six huitièmes et deux huitièmes ça fait huit huitièmes. Huit huitièmes c'est une unité. $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$ [EC_{G}]
Un quart plus un demi plus deux huitièmes égalent une unité. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$ [EC_{G}]
Un quart plus un quart un quart plus un quart égale une unité. $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ [EC_{G}]

Un demi, plus un quart, plus un quart. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ [EC_G]
Deux huitièmes, plus deux huitièmes plus un demi : $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$ [EC_G]
Un demi, plus un demi $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ [EC_G]
Deux huitièmes, plus deux huitièmes plus un quart plus deux huitièmes $\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$ [EC_G]

ENS *: « Y a plusieurs façons d'utiliser des fractions pour reconstituer une bande unité en utilisant les fractions ou les parties d'une fraction qui ont été reconstruites à partir de la bande unité initiale. »* Nous proposons la reconstitution suivante :

Les fractions de l'unité ont été construites à partir de la même unité. Il est donc possible d'additionner ces fractions pour reconstituer la bande unité. C'est une EC très floue qui essaie de généraliser.

3.2.5 Synthèse sur la partie E.

Nous retrouvons les mêmes variabilités intra individuelles. Pour l'année (1), il y a assez peu d'EC mais au moins il en existe une vraiment générale. L'année (2) le nombre d'EC est plus conséquent et elles sont diffusées tout le long de la séance. Pour l'année (3) les EC sont peu nombreuses, floues et restent très contextualisées. L'année (3), seule l'écriture des égalités montre une montée en généralité.

Pour la même séance présentant le même déroulement, l'éventail des possibles des EC nous interroge. La pratique de ce professeur n'est pas guidée par les connaissances à transmettre, pour autant l'activité choisie permettait de nombreuses EC potentielles. En effet, il est possible d'établir des règles sur la comparaison du numérateur et du dénominateur qui permettent de comparer la fraction à 1. Cette activité permet également de travailler, à la marge, sur ce qu'est une bande de référence, une unité. Elle engage sur des règles d'additions de fractions. On peut additionner des fractions de dénominateurs différents à condition d'utiliser des fractions équivalentes. Ainsi $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{1}{2}$ peut-être calculé (Sans avoir à juxtaposer les bandes) en se servant des équivalences entre $\frac{2}{8}$ et $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{8}$
Notre propos n'est pas de dire comment le professeur aurait pu faire mieux, nous reconnaissons la complexité de son travail, mais plutôt de questionner ce qui semble manquer dans les ressources ou en formation pour permettre au professeur de réussir une des grands rôles du métier : être en capacité d'exposer des connaissances décontextualisées, formalisées et généralisées.

3.3 Conclusion

La palette des possibles pour une séance est importante que ce soit en termes de gestion ou bien en termes de contenu. Solène fait varier des modalités de travail (En groupe ou à deux), l'utilisation ou non du matériel. Les supports de travail changent pour les élèves (Ardoises ou cahier) mais aussi pour l'enseignante qui passe d'un grand tableau noir aimanté à un TBI. Solène s'autorise à modifier, à reformuler les consignes. Bien que ces dernières soient écrites dans la ressource et recopiées dans les fiches de préparation leurs formulations ne sont pas stables et varient d'une année sur l'autre. De plus, Solène oublie une année une contrainte de la consigne, la rappelle l'année (1), puis ne la donne plus les années (2) et (3).

Les modes de validation varient aussi : avec ou sans le matériel. Certaines contraintes sur le matériel ne sont pas prises en compte systématiquement (Absence de plis des bandes).
Les modalités de gestion des mises en commun changent ainsi que l'exposition des procédures. L'année (1), elle fait passer tous les groupes qui affichent leurs bandes, l'année (2) elle organise les résultats sur le tableau mais l'année (3) elle écrit quelques égalités au tableau numérique sans aucune organisation.
D'années en années les interactions avec les élèves deviennent plus nombreuses.
Les caractéristiques de sa pratique peuvent évoquées un cours dialogué Hersant (2004) car s'appuient sur de nombreuses interactions. Cependant, la pratique de Solène s'écarte de la description proposée par Hersant (op.cit) :
« Le professeur choisit de s'appuyer sur un problème pour réaliser son objectif mais il n'effectue pas réellement la dévolution du problème à ses élèves puisque la responsabilité de la production des connaissances et de leur évaluation 'est laissée aux élèves qu'à de rares moments et que le professeur privilégie une résolution collective et guidée du problème, en s'appuyant sur quelques élèves de la classe ». (Hersant, 2004 p24)
Solène effectue une dévolution du problème, les temps consacrés à recherche sont longs. Elle ne propose pas de résolution collective mais plutôt de longue phase de mises en commun. Nous rejoignons Hersant sur la description des institutionnalisations de ces cours dialogués :
« Par ailleurs, dans cette façon de procéder l'institutionnalisation est très diluée tout au long de l'enseignement et s'effectue uniquement au moment de la correction d'exercices : il n'y a pas de moment d'institutionnalisation formelle, comme on peut l'observer dans la classe de l'autre professeur lorsque l'enseignant fait ce qu'il appelle « une leçon ». (Hersant, 2004 p24)
Pour poursuivre, nous rappelons cette citation de Brousseau connue « *« entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. » (Brousseau, 1986 p. 59).*
Cette dernière citation donne des indications sur la posture à adopter du professeur. Cette posture est celle du maitre lors de la dévolution voire de la phase de recherche.
Notre étude nous montre le cas d'une enseignante expérimentée qui ne s'autorise plus à enrichir les connaissances des élèves, ni à oser dépasser les déclarations des élèves. En revanche, cette enseignante ose modifier les scénarios, articuler des ressources reconnues difficiles par ses pairs. Elle n'hésite pas à proposer du travail de groupes à 4 ou à deux. Enfin, elle distingue différentes phases dans son enseignement, elle hiérarchise les procédures des élèves[88] et essaie de conclure chacune de ses séances. En revanche, sa prise de risque s'arrête au moment où il s'agit d'exposer des connaissances. Solène assure la paix scolaire. Elle fait montre d'une vigilance didactique plus ou moins affirmée mais elle endosse plus difficilement son rôle lorsqu'il s'agit d'institutionnaliser.

[88] *Nous nous appuyons sur l'ensemble des séances vues et filmées.*

Partie III

Chapitre VII – Sasha : analyse et comparaison des expositions de connaissances écrites et orales

La partie 3 de la thèse va être consacrée à l'étude du Processus d'Institutionnalisation dans d'autres classes conduites par d'autres maitres formateurs.
Le chapitre 7 est plus particulièrement consacré aux pratiques d'une enseignante : Sasha, pratiques que nous comparerons à celle de Solène. Les deux PEMFS se connaissent et travaillent dans la même circonscription[89]. Elles utilisent les mêmes ressources. Dans leurs classes, les mêmes outils sont mis en place pour les élèves : cahier du jour, recueil de leçons. Nous avons eu l'occasion de les réunir et d'échanger sur leurs pratiques.
Ce chapitre va nous permettre d'une part de décrire ce qui relève des EC écrites de Sasha sur trois ans et d'autre part de décrire les EC orales qu'elle produit sur deux séances. Au fil du texte, nous ferons des comparaisons avec les EC de Solène. Nous comparerons également une séance en particulier, construite avec la même ressource et menée par les deux enseignantes, chacune dans leur classe.

1 Rappel et présentation des données.

1.1 Présentation des données

Dans notre protocole initial nous avions espéré recueillir autant de données sur les deux classes de Sasha et de Solène. Pour des raisons matérielles (caméra qui tombe en panne ou qui tombe et se casse), mais aussi pour des raisons provenant parfois de réticences de la part de Sasha, nous avons peu de ses séances filmées. Dans le chapitre 3, nous avons expliqué les raisons de ces réticences et de nos malentendus.
Nous avons donc pu recueillir pour notre étude les cahiers de leçons sur quatre années consécutives, six séances filmées (dont trois sur les fractions) ainsi que les cahiers d'exercices et les évaluations d'une année.

1.2 Présentation de Sasha.

En dehors des phases de découverte, Sasha juge très rapidement que ce qu'elle fait en classe, n'est pas intéressant et ne souhaite pas nous le montrer. En revanche, elle nous a

[89] Une circonscription est le résultat d'un découpage administratif d'un département. Une circonscription est dirigée par un inspecteur de circonscription. En moyenne, en région parisienne, 250 enseignants sont regroupés dans une circonscription. Ce découpage est fait en fonction du nombre d'écoles, d'enseignants et d'élèves et des spécificités du territoire.

communiqué et photocopié très facilement les cahiers de ses élèves et ses évaluations. Elle ne répond presque jamais aux mails, en revanche, nous nous sommes rencontrées assez souvent en dehors de la classe pour échanger sur sa pratique. Lors de ces échanges, nous notions des bribes de conversations, mais il n'était pas possible de les enregistrer. Plusieurs fois, nous l'avions sollicitée pour recueillir ses fiches de préparations mais en vain. Bien que ce soit à la marge de notre recherche, nous nous rendons compte que travailler au plus près des pratiques des PE demande un temps long pour se rapprocher des collègues afin de gagner leur confiance. Approcher ce qui peut paraitre le plus personnel de l'activité professionnelle (ce qui se passe dans l'espace clos de la classe et les préparations du professeur) est un vrai défi à relever car ce n'est que cela qui montre le professionnel dans le plein exercice de son métier. Nous avons réussi à nous approcher le plus possible des pratiques de Solène (chapitres 4, 5, 6) et de Julien (chapitre 8), un peu moins de celle de Sasha (chapitre 6) et pas de celle de Gwen (chapitre 8).

Alors que Solène dit facilement qu'elle rencontre des difficultés à institutionnaliser car elle pense ne pas savoir faire, Sasha montre, quant à elle, que les questions qui touchent l'exposition des connaissances la rendent mal à l'aise mais pour des raisons différentes de celles évoquées par Solène. La quantité d'EC écrites par Sasha nous permet de penser qu'elle est assez assurée dans sa production d'écrits mathématiques.

Le 10 Juillet 2015, nous nous[90] sommes rencontrées. À cette occasion Sasha nous explique qu'elle n'a jamais été à l'aise avec les manuels et les ressources. La seule ressource pour elle qui a une vraie valeur ajoutée est ERMEL, qu'elle compare à un livre sacré. Pour autant elle ne suit pas exclusivement cette ressource, elle déclare utiliser Cap Math, Euro Maths et d'autres fiches qu'elle puise parfois sur Internet[91]. Sasha ne nous donne pas les sources Internet, nous les avons retrouvées grâce à des indices prélevés sur les fiches empruntées. Pour le formateur qu'elle est, elle semble craindre l'interprétation de ces emprunts sur Internet, elle n'ose donc pas le dire. Certaines de ces sources relèvent de blog de professeur de collège[92].

Les programmes de sixième du collège et ceux de fin de cycle 3 sont assez proches. La volonté institutionnelle actuelle est d'ailleurs de faire un cycle commun : cycle 3 qui serait constitué des deux dernières années de primaire et de la classe de sixième du collège. Cette volonté va sûrement avoir des effets identiques à ceux constatés pour Sasha.

Sasha fait partie du conseil école-collège[93] de son secteur. Elle ne trouve pas dans les ressources du primaire, ni dans les documents institutionnels des éléments de texte du savoir. Elle s'autorise donc à trouver des textes du savoir auprès de collègues du secondaire par l'intermédiaire de leur blog.[94]

[90] Sasha Solène et moi.
[91] http://algorythmes.blogspot.fr/2015/04/topogramme-6-fractions-cartementale.html http://www.stylo-rouge-et-crayon-gris.fr/ (consulté le 15/07/2015)
[92] http://ekladata.com/hxpRcpM_5p_5NvEpDs6QQiSUww8.jpg (consulté le 16/07/2015)
[93] http://eduscol.education.fr/cid57365/le-conseil-ecole-college.html (en ligne le 19/07/2015)
[94] Elle utilise sûrement d'autres sources dont nous n'avons pas retrouvé la trace.

2 Analyse des données

2.1 Description du « cahier-mémoire » de Sasha.

Nous avons recueilli 4 recueils de leçons (appelé cahier mémoire par l'enseignante) de 4 années consécutives : de 2011 à 2015. Des modifications apparaissent essentiellement dans le cahier de l'année (4). Ces recueils de leçons sont des cahiers de dimension 21x29,7 de 96 pages. Quatre-vingts pages en moyenne sont remplies, une leçon faisant souvent une page recto verso. Le nombre de leçons oscille entre 48 à 50. Les initiales C (calcul), N(numération), P (problème), G (géométrie) et M (grandeurs et mesures) désignent le domaine de la leçon. Chaque initiale est indicée : (G_3) pour montrer qu'il s'agit de la troisième leçon en géométrie. L'année (1) le recueil de leçons ne comporte pas de sommaire. Les trois autres années, sur la première de couverture, la présence d'un sommaire permet de se repérer dans ce cahier. (Annexe 18) Chaque leçon est annoncée par un titre écrit en rouge. Les leçons comportent toutes une partie manuscrite et une partie de cours photocopiée (souvent issue des blogs de professeurs de collège).
La première année les EC écrites (ou leçons) étaient illustrées par ce qu'appelle Sasha des « *situations-repères* ». Nous allons montrer en quoi ces situations ont un rôle dans le PI de Sasha.

2.1.1 Les situations repères : description

Sasha donne la définition suivante d'une situation repère : « *une situation repère reprend la situation recherche, parfois c'est la même, c'est presque un doublon. Cette situation doit être refaite individuellement en classe, elle permet d'intérioriser ce qu'il y a à comprendre* » (le 16/07/2015). En classe elle expliquera le rôle de ces situations repères (15/11/2012) ainsi :

ENS12 : […] Attention car cela, vous allez le refaire ce travail-là[95], vous savez quand on fait en groupe comme cela, je vous redonne la même chose, de quelle manière ?on lève la main !
élève : tout seul
ENS 13 : tout seul, vous allez avoir le même matériel, mais forcément pour que cela tienne dans un cahier en plus petit, mais exactement la même chose, c'est la même chose, vous l'avez déjà fait mais y en a vous savez ils sont un peu spectateurs de ce qui se passe entre les autres, et quand ils se retrouvent tout seuls, ils se disent « tiens je n'ai pas tout perçu » et moi cela me permet de vérifier tout cela. D'autant plus que ce qu'on va faire aujourd'hui va nous permettre d'écrire un petit texte mémoire dans notre cahier d'aide-mémoire, donc c'est très important. J'ai eu presque tout ce que je voulais.

Nous comprenons que cette situation repère permet un premier réinvestissement à la suite de ce que les élèves ont eu à construire lors de la situation de recherche.
Cet extrait de transcription montre le double rôle de ces situations repères. Le premier est du côté du contrôle[96] du maître : il vérifie auprès des élèves les traces ou la reconnaissance des connaissances en cours de construction. Le deuxième atout de ces « *situations repères* »

[95] *Ce travail-là évoque la situation vécue lors d'une phase de recherche.*

[96] *Dans le sens de vérification que le travail effectué en groupe a bien été effectué par le plus grand nombre.*

est d'installer des conditions pour que les élèves soient contraints de faire fonctionner ces nouvelles connaissances, pour qu'ils soient impliqués dans le PI.

2.1.2 Les situations repères de Sasha: des écrits intermédiaires constitutifs du PI.

Cette « *situation-repère* » est donc pour le professeur un outil de régulation dans le sens où la réussite ou l'échec de l'élève à réussir cette activité[97] individuellement informe l'enseignant sur les manifestations des connaissances de ses élèves et permet de lever les incompréhensions. Elles vont lui permettre d'articuler les séances entre elles. Proposer une « *situation-repère* » fait partie des routines de Sasha : chaque séance comportant une phase de recherche sera suivie immédiatement (parfois différée) d'une « *situation-repère* ». Les élèves de sa classe savent cela. Cette proposition de « *situation-repère* » offre la possibilité aux élèves de trouver les moyens de se projeter sur la tâche à venir mais aussi de se donner un objectif (pas nécessairement en termes de savoir mais dans l'obligation d'essayer de comprendre ce qu'il y a en jeu). L'activité proposée dans la phase de recherche ne peut pas être considérée comme isolée et éphémère par les élèves puisqu'elle sera adaptée et donnée au moins une autre fois. La « *situation-repère* » est une des conditions créées par Sasha pour assurer la mémorisation et la continuité des connaissances : c'est une contrainte locale pour mettre en mémoire qu'elle s'est imposée. Cette contrainte permet à Sasha de prendre en compte la dialectique liée au travail public/privé et à la construction de nouvelles connaissances externe (en classe) et interne (pour soi).
Repérer en particulier des situations et leur donner un statut est un fait que nous avions déjà constaté lors de nos expérimentations pour le mémoire de master. Ainsi Marie n'intitulait pas ses leçons en indiquant le savoir en jeu mais plutôt la référence à la situation comme par exemple « *le partage du trésor* » qui traitait de la division.
Nous-mêmes, en tant qu'enseignante du premier degré avions ressenti le besoin d'identifier des situations pour lesquelles il y avait élaboration d'EC dans le recueil de leçons, nous les avions appelés des « *problèmes sources* »[98]. Nous n'avions pas les moyens de comprendre tout ce qui motivait ce besoin.

2.1.3 Exemple :

Exemple : La consigne extraite du ERMEL (p210) est la suivante :
En utilisant quatre fois le nombre 3 et les opérations que vous voulez (+, -, x, :) trouvez plusieurs calculs donnant des résultats différents. Attention on doit obligatoirement utiliser quatre fois le nombre 3. On ne peut pas écrire 33 ou 333 ou 3333.
Cette recherche est effectuée en groupe[99]suite à la mise en commun et à l'énoncé des règles de priorité puis les élèves individuellement font la situation-repère.
Le travail demandé dans cette situation-repère est une application immédiate de ce qui vient d'être découvert. Il y a un jeu des proximités ascendantes (lors de la mise en commun)-

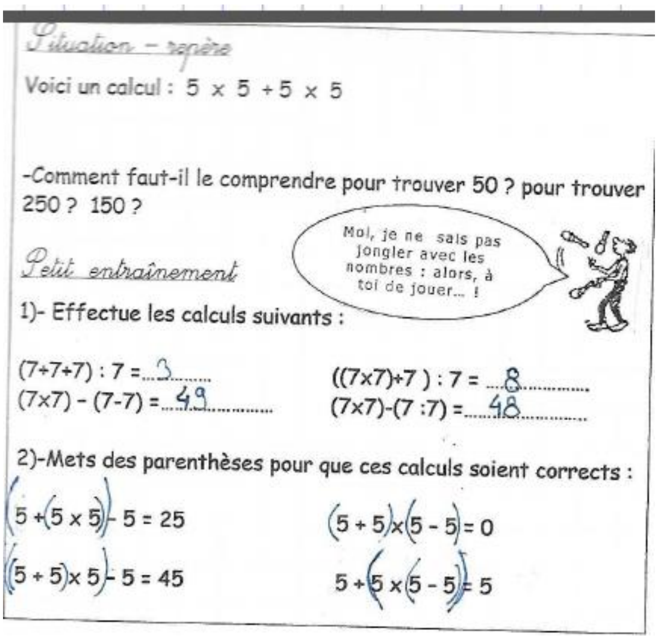
---

[97] Nous rappelons que nous utilisons ce terme dans le sens banal.

[98] Les problèmes sources étaient des situations (au sens de la Théorie des Situations Didactiques) auxquelles nous nous référions pour faire avancer le temps didactique. Nous les avions définis dans le cadre du mémoire du CAFIPEMF.(2006)

[99] Nous avons la vidéo de cette séance.

descendantes (énoncé des connaissances en jeu par l'enseignant et application directe par les élèves) formalisées par cette situation repère.
Les activités demandent une certaine adaptation au regard de l'activité proposée dans la recherche. En effet dans la recherche, les élèves étaient libres de trouver le résultat qu'ils voulaient et de mettre les signes opératoires et les parenthèses. Dans la « *situation-repère* » les élèves sont obligés de prendre en compte différentes contraintes : appliquer directement les règles de priorité et trouver le résultat du calcul puis appliquer les règles de priorités en prenant en compte le résultat donné.



Situation – repère

Voici un calcul : 5 x 5 + 5 x 5

-Comment faut-il le comprendre pour trouver 50 ? pour trouver 250 ? 150 ?

Petit entraînement

1)- Effectue les calculs suivants :

(7+7+7) : 7 = 3
((7x7)+7) : 7 = 8
(7x7) - (7-7) = 49
(7x7)-(7 :7) = 48

2)-Mets des parenthèses pour que ces calculs soient corrects :

((5 + (5 x 5)) - 5 = 25
(5 + 5) x (5 - 5) = 0
((5 + 5) x 5) - 5 = 45
5 + (5 x (5 - 5)) = 5

Maintenant, nous faisons un lien entre ces « *situations-repéres* » et le processus d'emblèmatisation (Sensevy 1996). Cet auteur décrit ainsi ce qu'il nomme le processus d'emblèmatisation :

> *«Dans une conception sociale de la cognition, on peut transposer à une institution didactique le travail collectif intrinsèque à l'activité scientifique. On peut construire, pour rendre compte de cette activité collective de gestion du temps et de la mémoire, la notion d'emblèmatisation. Emblèmatiser une production d'élève, cela consistera à institutionnaliser (à rendre visible par et pour l'institution) cette production comme emblème, c'est-à-dire de la constituer comme élément de la mémoire didactique de l'institution-classe. »* (Sensevy 1996, p.12)

Dans les exemples que nous citons ce n'est pas une production d'élève qui est « *emblématisée* » mais l'activité via la « *situation-repère* » que les élèves ont réalisée. Cette situation de référence est identifiée et figure dans le cahier de cours.
Dans l'expérience « *le journal des fractions* », (Sensevy, 1996) les élèves ont des responsabilités à engager dans l'écriture du texte du savoir. Le « *journal des fractions* » est un outil constitutif du PI. Sensevy explique :

> *« Certaines de ces significations socialement partagées vont jouer le rôle particulier d' « emblèmes ». Elles rythmeront l'avancée du savoir, et constitueront*

> *des jalons de la mémoire du système, jalons reconnus par l'ensemble des élèves. Il y aura dévolution d'une partie de la mémoire du système aux élèves, puisque seront sous leur responsabilité des gestes d'indications des moments de référence de la classe »* (Sensevy 1996, pp.18-19)

Puis dans les conclusions de son article, Sensevy ajoute que

> *« Dans le cadre de cette recherche, le Journal des Fractions semble avoir été un instrument de dévolution, au sens où l'entend Brousseau. En effet, le Journal des Fractions a permis aux élèves d'assumer, tout au long du processus d'apprentissage, leur responsabilité dans l'institutionnalisation. Il met particulièrement bien en évidence l'inscription temporelle du Processus d'Institutionnalisation qui commence dès lors que l'élève commence à écrire sur le Journal. Comme ce travail est porteur, nous l'avons vu, d'une chronogénéité virtuelle, il est également porteur d'institutionnalisation : reprendre dans la fabrication d'un problème un objet de savoir ancien, produire un geste de désignation d'un emblème, constituer dans ses interrogations un rapport nouveau dans la classe, c'est changer le statut d'une connaissance, c'est accroitre le degré d'institutionnalisation du rapport nouveau à la condition que ce rapport nouveau puisse s'inscrire dans le temps didactique de la classe. »* (Sensevy 1996, p.40)

Les situations-repères de Sasha n'ont pas les mêmes caractéristiques que ce qui est demandé aux élèves dans le journal des fractions. Pour autant nous retrouvons semble-t-il les effets du Journal des fractions dans les effets de ces situations repères. Refaire une situation permet de passer du procédural au plus général. Inscrire dans ses déroulements une activité ritualisée de reprise de la situation introductive permet aux élèves d'anticiper sur le « *après*.. » la séance.
Sasha n'a pas connaissance du texte de Sensevy[100]. En revanche, elle a lu des textes de Chevallard sur la transposition didactique et de Brousseau sur la mémoire didactique.
Les effets que nous voyons à ses « *situations-repères* » sont de cet ordre : « *les situations repères* » sont porteuses d'institutionnalisation, elles désignent un emblème qui marque la mémoire des élèves (mais choisi et fabriqué par le professeur). La part de responsabilités dans le PI des élèves de Sasha ne se situe pas dans l'écriture d'un texte mais essentiellement dans leur engagement dans les tâches proposées par l'enseignante et dans leur capacité à refaire. Ils doivent savoir refaire pour pouvoir apprendre parfois dans un contexte légèrement différent. Chaque élève doit refaire la situation et prendre conscience que c'est ce réinvestissement qui est une des clés de voûte du PI tel qu'il est construit pour Sasha.
Pour Solène ce qui soutient le PI se trouve dans les phases de rappels et les nombreuses interactions avec ses élèves. Sensevy, nous montre un autre dispositif qui participe au PI. Celui exposé et analysé dans le journal des fractions prend en compte également la production d'écritures mathématiques ce qui n'est pas le cas de Sasha et Solène. Butlen et al (2003) montrent que la production d'écrits intermédiaires par les élèves contribue au processus de conceptualisation. Nous ajoutons que la production de bilan de savoir engageait la responsabilité des élèves dans le PI en étant producteurs de textes

[100] *Nous lui avons demandé car nous savons qu'elle lit des textes de didactiques des mathématiques.*

intermédiaires. Les situations-repères de Sasha sont, pour nous, des écrits intermédiaires, ils participent au processus de conceptualisation mais la responsabilité de cet écrit est plus du côté du professeur.
Nous avançons l'idée suivante : une partie du PI et des modalités de mise en œuvre de ce PI sont personnelles et liées aux choix de gestion du professeur. Le PI est aussi le lieu où s'exerce de la manière la plus visible la vigilance didactique du professeur tant du point de vue des connaissances des professeurs (mathématiques et didactiques) que de la construction d'outil didactique pour aider à soutenir la mémoire des élèves.
Ce deuxième exemple de pratique nous permet également de voir d'autres éléments qui concourent au PI que nous n'avions pas encore identifiés mais qui étaient en germe. D'une part la part de responsabilité des différents acteurs (élèves/ enseignants) et leurs distributions qui ont un rôle dans la dépersonnalisation. D'autre part le rôle d'EC intermédiaires (écrits ou oraux) dans le processus de conceptualisation.
Nous avons vu qu'il existe des EC que nous avons qualifiées d'intermédiaires car leur degré de dé contextualisation était trop faible pour les qualifier de textes de savoir. Ces EC intermédiaires sont soit orales et sont souvent alors diffuses, soit écrites (elles ne sont pas alors nécessairement décontextualisées et dépersonnalisées).
Les ingénieries de Sensevy et Butlen montrent des dispositifs possibles pour que la responsabilité de ces EC intermédiaires soit du côté des élèves. Les pratiques de nos PE montrent le caractère incontournable de ces EC intermédiaires mais avec une prise en charge différente des niveaux de responsabilités. Pour Sasha, il y aura des mouvements ascendants-descendants montrant alors que le PI est un système dynamique et évolutif.
En revanche pour Solène, ces EC intermédiaires restent dans des proximités horizontales.

3 Etudes des sommaires sur trois années.

3.1 Description globale des « cahiers-mémoires » de Sasha.

Nous avons décrit le rôle des situations repères dans le PI que propose Sasha. Les contenus écrits des recueils de leçons de Sasha articulent des EC intermédiaires : les « *situations repères* » et des EC écrites au caractère plus général.
Les paragraphes suivants vont décrire et analyser les sommaires ce qui favorisera la comparaison avec Solène. Sasha, dès l'année (2), propose aux élèves un sommaire qu'ils doivent compléter au fur et à mesure de l'année. Les EC écrites sont proposées les unes à la suite des autres, si bien que le sommaire reconstitué ci-dessous permet de voir quelle a été la première leçon de l'année et la dernière. Les leçons sont écrites dans l'ordre chronologique.

3.2 Comparaison des sommaires année (1), année (2) et année (4)

Sasha produit l'année (1) 48 leçons dans 5 domaines (géométrie, mesure, problème, numération, calcul). Il y a 7 leçons pour le domaine mesure et 4 en résolution de problèmes, 12 en calcul, 11 en numération et 15 en géométrie. Trois leçons sur 11 concernent les fractions. Une leçon correspond souvent à un recto et à un verso d'une page d'un grand cahier. Il n'y a pas d'uniformité dans le choix des titres, ces derniers proposent des types de tâches (au sens de la TAD) : « *tracer deux droites perpendiculaires* » ou bien annonce une

technique : « *la technique de la division* » ou encore nomme l'objet du savoir : « *cercle et disque* » ou « *les polygones* ».
Les mêmes caractéristiques se retrouvent l'année(2) sur le choix des titres. Cette année-là, 50 leçons sont produites, une de plus dans le domaine des grandeurs et mesure et une de plus en géométrie. Le contenu de ces leçons supplémentaires n'est pas nouveau par rapport à l'année (1). Ce sont des leçons qui ont été découpées autrement. Par exemple l'année (1) la leçon « *Mesure5 : les volumes* » était une unité. L'année (2), cette leçon se fait en deux temps : Mesure5 les volumes et Mesure6 : comparer les volumes. Mesure6 est une partie de Mesure5 de l'année (1).

3.2.1 Un PI marqué par des EC écrites nombreuses.

Le PI est marqué par un grand nombre d'EC écrites ainsi qu'une forte stabilité à la fois dans la programmation et le contenu. La programmation et la succession des leçons sont identiques d'une année sur l'autre. Le tableau ci-dessous permet d'illustrer cela. Les tableaux sont en entiers dans l' annexe 18.

Sommaire reconstitué du cahier de Sasha 2011-2012	**Sommaire reconstitué du cahier de Sasha 2012-2013**
Leçons écrites dans l'ordre chronologique.	
1. **Géom1** : le point, la droite, le segment, Solides et patrons	1. **Géom1** : le point, la droite, le segment.
2. **Numération1** : les nombres entiers.	2. **Géom2 :** Solides et patrons.
3. **Calcul1** : la table de Pythagore	3. **Numération1** : les nombres entiers.
4. **Numération2** : les mots nombres.	4. **Calcul1**: La table de Pythagore.
5. **Géom2** : tracer deux droites perpendiculaires ;	5. **Numération2** : Les mots nombres
6. **Géom3** : tracer deux droites parallèles.	6. **Géom3** : Tracer deux droites perpendiculaires
7. **Numération 3 :** les fractions usuelles.	**7.** **Numération 3 :** les fractions usuelles
8. **Numération4** : les multiples d'un nombre.	8. **Numération 4** : les multiples d'un nombre
9. **Calcul2** : la technique de l'addition	9. **Calcul2** : la technique de l'addition
10. **Calcul3** : multiples et diviseurs : vocabulaire	10. **Calcul3** : Multiples et diviseurs (vocabulaire)
11. **Calcul4** : la technique de la soustraction avec retenues	11. **Calcul4** : la technique de la soustraction avec retenues
12. **Calcul5** la technique de la soustraction avec retenue.	12. **Calcul5** : la technique de la soustraction avec retenues.
13. **Calcul6** : la division technique	13. **Calcul6**: la division technique (les feuilles de partage)
14. **Calcul6** (2) : la technique de la division	14. **Calcul6** (2) : la technique de la division
15. **Géom4** : cercle et disque	15. **Géom4** : Cercle et disque, définitions, vocabulaire.

L'année(3) est identique à ces deux années. L'année(4) des modifications sont apportées.
44 leçons sont proposées car Sasha regroupe des leçons, ajoute des paragraphes, modifie sa programmation (l'ordre des leçons dans l'année).
Comme l'atteste le tableau ci-dessous ; l'année (4) elle modifie les titres de ses leçons et les formule sous forme de questions : « *Comment partager une grande quantité ? Comment comparer une fraction à l'unité (=1) ?* »
Trois leçons sur les fractions sont présentes : les fractions usuelles, comparer une fraction à l'unité et les fractions décimales. L'année (4), l'ordre des leçons est inversé et les titres

changent : « *Comment comparer une fraction à l'unité (=1) ? les fractions usuelles, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?* ».
Malgré ces changements locaux, le nombre de leçons et la quantité des EC écrites associées sont très importants. Les élèves sont en classe 36 semaines par an. Une moyenne de 50 leçons représente un peu plus d'une leçon écrite par semaine.
Lors de notre rencontre en Juillet 2015, face aux nombreuses leçons écrites du cahier de Sasha, Solène s'étonne et demande comment elle a le temps d'en écrire autant. Sasha admet qu'elle dépasse les horaires dédiés aux mathématiques mais qu'il est important que les élèves aient des leçons. Elle ajoute que son cahier est apprécié des professeurs du collège.

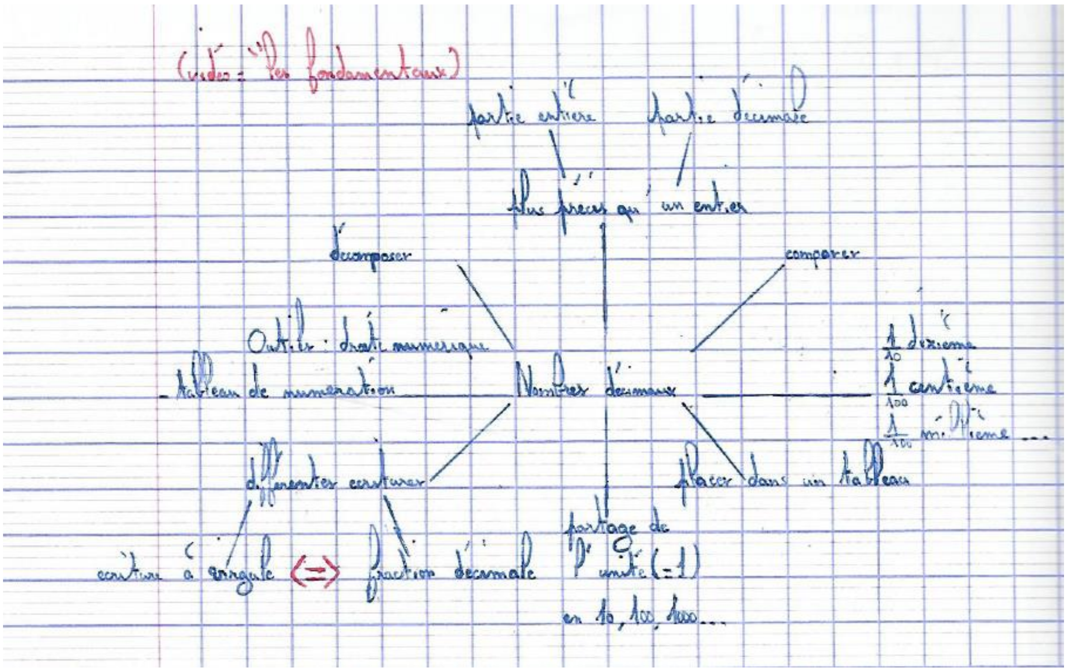
3.2.2 Un PI marqué par une grande stabilité des contenus enseignés.

L'étude des sommaires associée à une vérification des contenus de plusieurs leçons permet de dire que les contenus sont stables (reprises des mêmes définitions parfois des mêmes exemples.). Ce qui change c'est la place des « *situations repères* ». L'année (1) ces situations étaient réalisées et collées (car souvent réalisées sur un support photocopié) dans le cahier d'exercices alors qu'à partir de l'année(2) elles font partie intégrante du cahier de cours.
L'année(4) un autre changement apparait. Nous en avons quelques explications. La classe de Sasha a été retenue pour expérimenter la « *pédagogie inversée* » par des formateurs Atice[101] à l'aide de tablettes numériques. Sasha nous explique « *la pédagogie inversée, c'est lorsque le savoir provient des élèves et non plus du professeur. Ils écoutent leurs capsules, fabriquent des cartes mentales.* ». Nous n'avons pas pu observer de séances de classe qui fonctionnaient en atelier avec les tablettes. Nous ne comprenons pas vraiment ce que Sasha tente de nous expliquer sur cette version de la pédagogie inversée. Nous voyons des traces de ces changements de pratique dans le cahier de cours (Annexe 19) puisqu'apparaissent les cartes mentales créées par les élèves et des références aux capsules éditées par Canopé[102].

---

[101] *Atice : formateur titulaire du CAFIPEMF spécialisé dans les Tice.*

[102] *https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/accueil.html, c'est un site institutionnel.*


(vidéo : "les fondamentaux")
partie entière
partie décimale
plus précis qu'un entier
décomposer
comparer
Outils : droite numérique
tableau de numération
Nombres décimaux
1/10 dixième
1/100 centième
1/1000 millième ...
différentes écritures
placer dans un tableau
écriture à virgule <=> fraction décimale
partage de l'unité (=1)
en 10, 100, 1000...

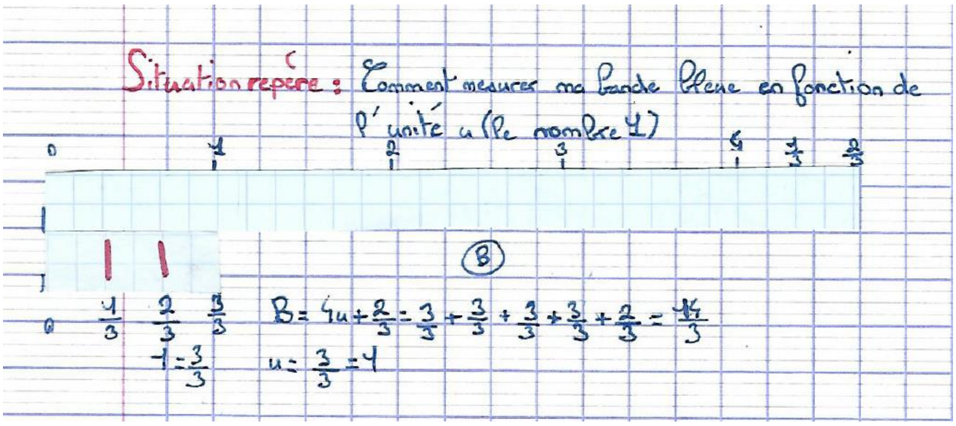
4 Etude des EC écrites sur une année : année 2014-2015.

L'étude des EC écrites va être réalisée à partir de l'année(4) sur les trois leçons produites sur les fractions.

4.1 Analyse de la leçon 1 : comment comparer une fraction à l'unité (1) ?

4.1.1 Partie A : la situation repère

La leçon débute par la situation-repère. Celle-ci rappelle la question « *comment comparer une fraction à l'unité 1 ?* ». Immédiatement après la question est collée une bande mesurant $4u+\frac{2}{3}u$, sous cette bande est collée la bande unité graduée en tiers.



Comme nous le verrons lors de l'étude des EC orales, cet exemple reprend la correction réalisée suite à l'activité de mesure d'une grande bande. Lors de la séance de classe, les élèves devaient mesurer une grande bande à l'aide d'une bande-unité. La grande bande (la même pour tous les groupes) et la bande unité du travail de groupe n'ont pas les mêmes dimensions que celles collées dans le cahier.
Sasha souhaite que les élèves refassent la même situation et la garde en mémoire. Pour cela elle est contrainte de leur distribuer un matériel dont les dimensions sont compatibles avec celles du cahier. En proposant cela, elle confronte une première fois les élèves à utiliser des bandes unités de dimensions différentes. Cette visibilité de la diversité des longueurs des bandes unités est alors une étape dans le processus de conceptualisation. La généralisation semble se réaliser par la succession d'exemples de « *il existe une unité que l'on peut partager en tiers* » pour pouvoir écrire « *quel que soit u…* ».
C'est aussi une forme de recontextualisation en jouant sur les variables didactiques (longueur de la bande-unité). La décontextualisation a lieu ensuite dans les écritures et dans la partie B (voir paragraphe ci-dessous). Les écrits de Sasha nous permettent de voir un exemple de ce que nous avions identifié comme le processus de contextualisation-décontextualisation-recontextualisation (PCDR) qui est bien encapsulé dans le processus de transfert-généralisation (PTG).

Sous ce collage peuvent être rappelées les différentes écritures qui ont été produites à l'oral :

4u+$\frac{2}{3}$ = $\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}$ =$\frac{14}{3}$. [EC_G] 1=$\frac{3}{3}$ u=$\frac{3}{3}$ =1

L'écriture de l'unité u disparait dès le deuxième terme de la somme sans jamais réapparaitre. Ce qui revient à additionner une longueur et un nombre.
La dernière égalité u=$\frac{3}{3}$ =1 nous montre qu'il y a une confusion de la part de ce professeur entre l'expression mesurée de sa longueur 4u et la valeur de sa mesure 4. Pour passer de la grandeur au nombre, elle attribue une valeur numérique (u=1) à l'unité de mesure u. Le passage de l'aspect mesure de la fraction à la fraction nombre n'est absolument pas trivial. Sasha essaie de justifier ce passage par un jeu d'écriture : $\frac{4}{3}$u= $\frac{4}{3}$x1 = $\frac{4}{3}$, la lettre u semble alors avoir un rôle de paramètre auquel on affecte la valeur 1.
L'activité qu'elle a choisie de faire vivre à ses élèves, la contraint à utiliser un matériel désigné par « *bande-unité* ». Le matériel se retrouve dans les différentes ressources utilisées. L'usage est alors de désigner par u cette bande. Les confusions se mettent vite en place entre la désignation orale du matériel « *l'unité* » et l'unité de mesure. Ainsi les élèves manipulent **<u>une</u>** bande qui représente **<u>un</u>** objet et u=1. Solène sans justification fait disparaitre cette référence à l'unité u, Sasha donne une explication peu satisfaisante. Toutes les deux ont besoin en quelque sorte d'éliminer « u ». Elles montrent bien la difficulté à généraliser un savoir lorsque celui-ci est introduit dans un contexte (celui de la mesure) à l'aide d'un matériel (une bande). Passer de la fraction-mesure à la fraction nombre ne peut pas se faire dans leur projet en s'appuyant sur une pédagogie du pas à pas. Les deux PE sont contraintes de réaliser ce passage en justifiant comme elles le peuvent.

4.1.2 Partie B : « je retiens »

La partie suivante « *je retiens* » propose le texte suivant :

Une fraction est un partage équitable, une division d'1 unité (le nombre 1). Les fractions permettent donc d'obtenir des nombres plus précis que les nombres entiers.[EC_G] <u>Exemple</u> : 2/3. 3 est le dénominateur : il indique que l'on a partagé 1 en 3 parts égales. .[$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$] 2 est le numérateur : il indique le nombre de parts qui ont été reportées. .[$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]

Ce texte propose une définition de la fraction qui est présentée comme une division particulière de l'unité (qui vaut 1 pour Sasha) et d'une propriété de cette fraction « *elles permettent d'obtenir des nombres plus précis que les entiers* ». Une première confusion apparaît celle entre quotient et division. La fraction peut être un quotient mais n'est pas une division et n'exprime pas un partage équitable. Il est difficile de considérer la fraction $\frac{2}{3}$ ou $\frac{5}{3}$ comme un partage équitable. La confusion se comprend dans le sens où la division est souvent introduite comme l'opération permettant de rendre compte des partages équitables.

Le quotient est un aspect de la fraction, il désigne un nombre et pas seulement une opération.
La propriété énoncée : « *elles permettent d'obtenir des nombres plus précis que les entiers* », nous interroge. Que signifie plus précis ? Un nombre entier n'est-il pas précis ?
Le mot est sûrement mal choisi, le projet de Sasha est de montrer qu'il est toujours possible d'exprimer des mesures de longueurs plus petites que l'unité de référence.
Nous retrouvons pour la définition du numérateur les mêmes imprécisions relevées dans les textes de Solène. Le numérateur est défini ainsi : il indique le nombre de parts qui ont été reportées. Cette définition oublie de préciser que c'est le nombre de parts de l'unité qui est reporté. Cette définition est en contexte, retirer une partie de ce contexte fait perdre du sens à la définition.
Les EC se poursuivent sur des règles plus générales illustrées par des exemples :

Si le numérateur est égal au dénominateur, la fraction est égale à 1, $\frac{3}{3}$ =1 et 1u=$\frac{3}{3}$ u [EC_G] Si le numérateur est plus petit que le dénominateur la fraction est plus petite que 1. $\frac{2}{3} \leq 1$ (c'est $\frac{1}{3}$ de moins que l'unité 1) [EC_G] Si le numérateur est plus grand que le dénominateur la fraction est plus grande que 1. $\frac{14}{3}$>1 $\frac{14}{3}$= 4+$\frac{2}{3}$ [EC_G] Ce texte est une « *copie* »du texte proposé dans le Dico Math de Cap Math p6. Sasha change le dernier exemple ($\frac{14}{3}$ au lieu des $\frac{4}{3}$ du Dico Math).

Cette égalité $\frac{3}{3}$ =1 et 1u=$\frac{3}{3}$ u montre de nouveau la confusion réalisée par Sasha. La référence à l'unité peut être retirée pour elle car u=1. Cette montée en généralité part d'une bonne intention mais se réalise d'après une connaissance mal installée de Sasha. Nous n'avons pas la certitude que cette montée en généralité soit explicite pour Sasha, ce qui est explicite pour Sasha est la volonté de justifier les écritures soumises aux élèves et d'écarter l'unité de référence.

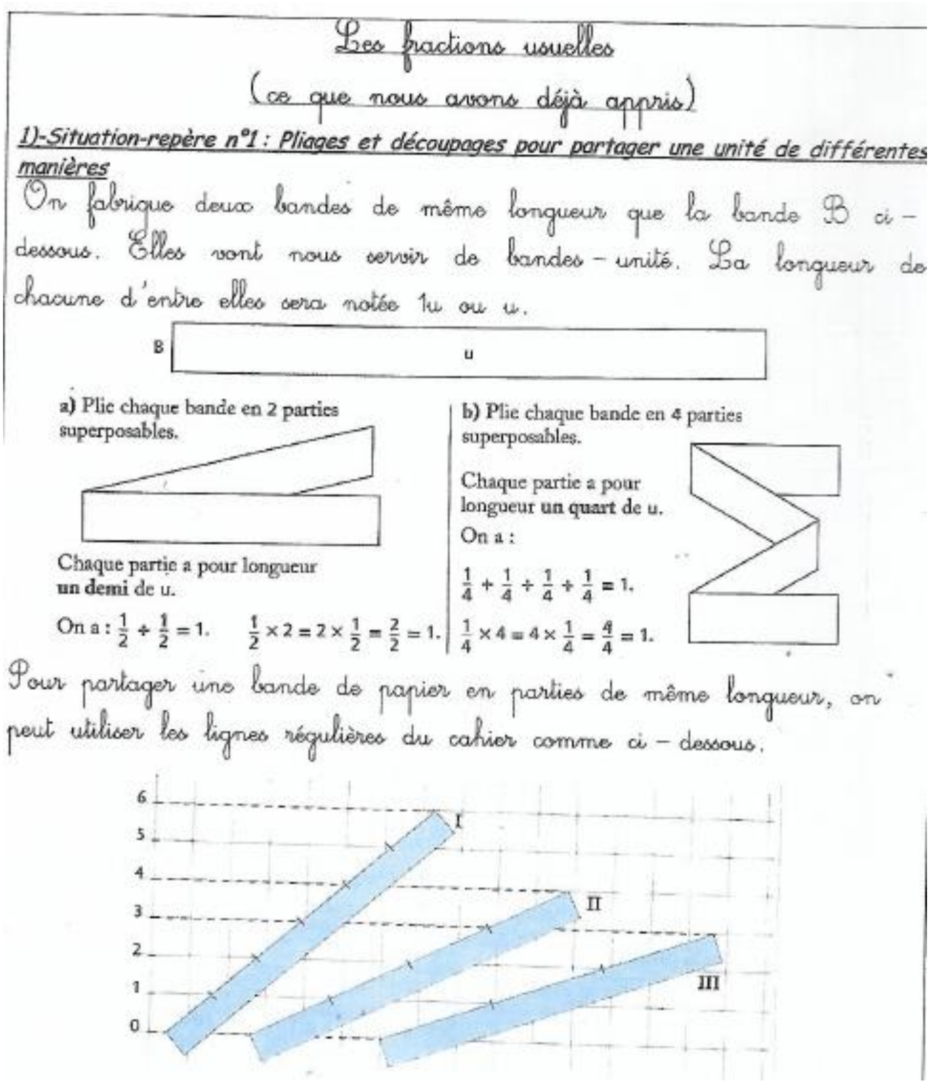
4.2 Analyse de la leçon (2) : les fractions usuelles.

Cette leçon est constituée du rappel de deux situations repères. Nous n'avons jamais assisté à la mise en scène de ces situations. Seuls restent les écrits qui y sont associés.

4.2.1 Partie A : situation repère (1) : pliages et découpages pour partager une unité de différentes manières.

La première situation repère semble avoir pour objectif le rappel des techniques pour pouvoir partager en parts égales la bande unité. Le texte rappelle qu'avec une bande de référence nommée B, autant de gabarits souhaités vont pouvoir être réalisés. Ces gabarits seront appelés « *bande-unité* ». Le texte revient sur la manière de plier les bandes illustrée par un dessin. Pour chacun des pliages, sont mises en perspective les égalités correspondantes. Le texte spécifie que « chaque partie a pour longueur un demi de u », en revanche dans les égalités la lettre « u » disparait. Cette montée en généralité peut être lue comme « quelle que soit l'unité ces égalités seront toujours justes ».

La deuxième partie de la leçon expose très rapidement « *la machine à partager* », c'est-à-dire la possibilité d'utiliser un réseau de droites parallèles pour effectuer des partages équitables.



Les fractions usuelles

(ce que nous avons déjà appris)

1)-Situation-repère n°1 : Pliages et découpages pour partager une unité de différentes manières

On fabrique deux bandes de même longueur que la bande B ci-dessous. Elles vont nous servir de bandes-unité. La longueur de chacune d'entre elles sera notée 1u ou u.

a) Plie chaque bande en 2 parties superposables.

Chaque partie a pour longueur **un demi** de u.

On a : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. $\frac{1}{2} \times 2 = 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

b) Plie chaque bande en 4 parties superposables.

Chaque partie a pour longueur **un quart** de u.

On a :

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

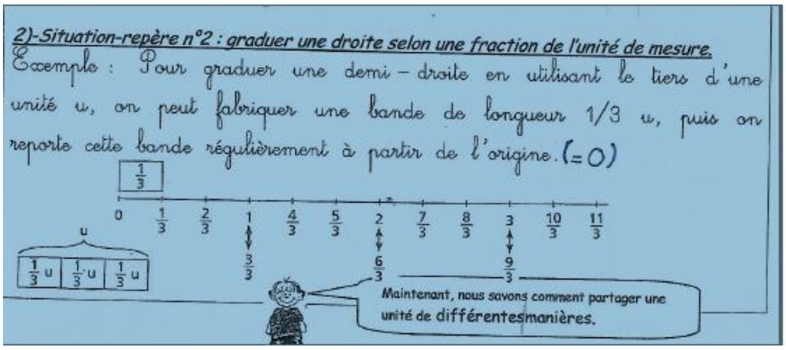
$\frac{1}{4} \times 4 = 4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

Pour partager une bande de papier en parties de même longueur, on peut utiliser les lignes régulières du cahier comme ci-dessous.

4.2.2 *Partie B : situation repère (2) : graduer une droite selon une fraction de l'unité de mesure.*

Cette deuxième situation-repère montre en quoi l'instrumentalisation de la bande va permettre de construire une droite graduée.
La droite graduée est l'un des moyens trouvé par Sasha et Solène pour montrer que la fraction est un nombre. La droite graduée arrive plus tôt dans le projet de Sasha. Solène ne l'introduit qu'au moment où les élèves découvrent les fractions décimales. La droite graduée permettra de dépasser la fraction mesure. Les graduations réalisées écartent de fait l'utilisation de la bande unité.
Les équivalences d'écritures d'un même nombre sont apparentes $\frac{9}{3} = 3$ sans que les égalités soient écrites. La droite graduée permet aussi de conserver en mémoire l'idée d'ordre : les nombres (si on lit la droite graduée de gauche à droite) sont ordonnés du plus petit au plus grand. L'utilisation de la droite graduée permet d'approcher le statut de nombre de la

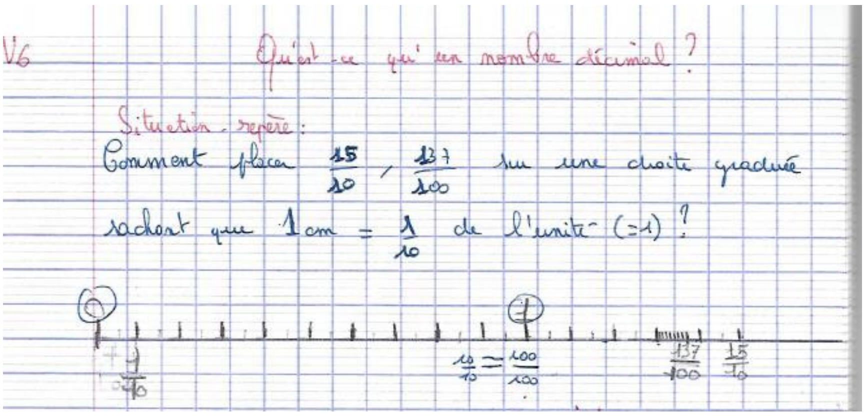
fraction : les élèves peuvent alors se représenter des fractions comprises entre des entiers, de plus cette représentation en ligne des nombres leur est familière depuis la maternelle.



4.3 Analyse de la leçon (3) : qu'est ce qu'un nombre décimal ?

4.3.1 Partie A : situation repère : comment placer 15/10 et 137/100 ?

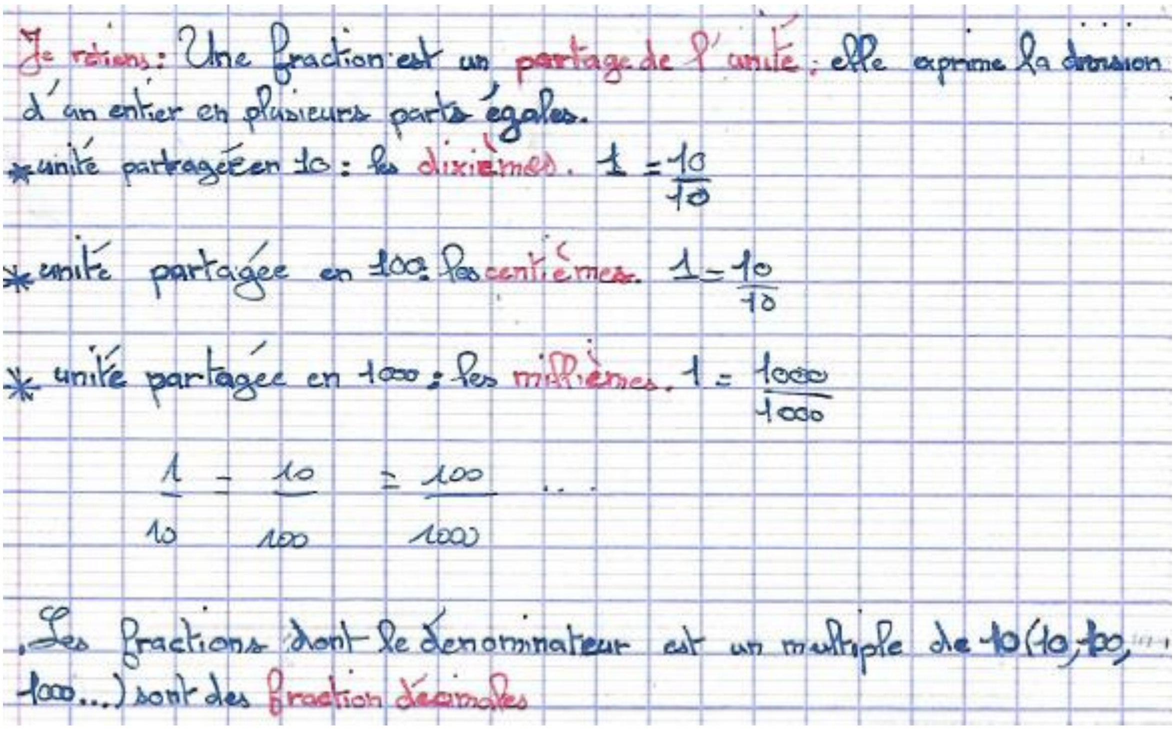
La consigne du ERMEL p 460 est la suivante : « *vous allez devoir construire une graduation sur la grande bande en utilisant la petite bande. La longueur de cette petite bande est égale à un dixième de l'unité. Le nombre 0 est déjà placé. Placez le nombre 1 sur la grande bande* ». Dans la situation repère elle est reprise ainsi : « *Comment placer* $\frac{15}{10}$ *et* $\frac{137}{100}$ *sur une droite graduée sachant que 1cm=* $\frac{1}{10}$ *de l'unité (=1) ?* »
La modification apportée quant à la longueur de la bande unité est un moyen pour Sasha de faire construire une droite graduée dont les dimensions sont compatibles avec celles du cahier. Les élèves vont alors reporter dix fois 1 cm et trouver que 10 cm est la longueur de l'unité. Les millimètres de la règle graduée correspondent alors aux centièmes de l'unité : ce qui est commode pour tracer sur un cahier. En revanche d'un point de vue conceptuel cela nous semble moins trivial pour les élèves. Nous avons la chance d'avoir pu filmer cette séance, l'étude des EC orales qui est faite dans les paragraphes suivants devrait nous permettre de comprendre comment l'enseignante assure ces différentes conversions.
Déterminer la longueur de l'unité avec ces nouvelles données du problème conduit à utiliser la proportionnalité. Les deux grandeurs en jeu sont des longueurs exprimées dans deux unités différentes (le cm et u).
La contrainte (faire en plus petit dans le cahier) que s'impose Sasha modifie la tâche. Le recontextualisation de Sasha assure sûrement un saut conceptuel plus ou moins assumé et explicite.



4.3.2 Partie B : « je retiens ».

Dans le texte suivant deux aspects des fractions sont présents. L'aspect partie-d'un-tout « *partage de l'unité* » et l'aspect quotient « *la division en parts égales* ». Le texte essaie d'articuler un aspect des fractions découvert dans un contexte de mesure de longueur avec la division.

Des équivalences d'écritures sont présentes ainsi qu'une définition de ce qu'est une fraction décimale. La définition : « *une fraction est un partage de l'unité* » est un écrit intermédiaire (restrictif) car la fraction 14/3 ne peut être considérée comme un partage de l'unité mais comme la somme de fractions de l'unité. De nouveau cet extrait montre les essais de Sasha de proposer des EC assez générales.


Je retiens : Une fraction est un partage de l'unité ; elle exprime la division d'un entier en plusieurs parts égales.

* unité partagée en 10 : les dixièmes. $1 = \frac{10}{10}$

* unité partagée en 100 : les centièmes. $1 = \frac{10}{10}$

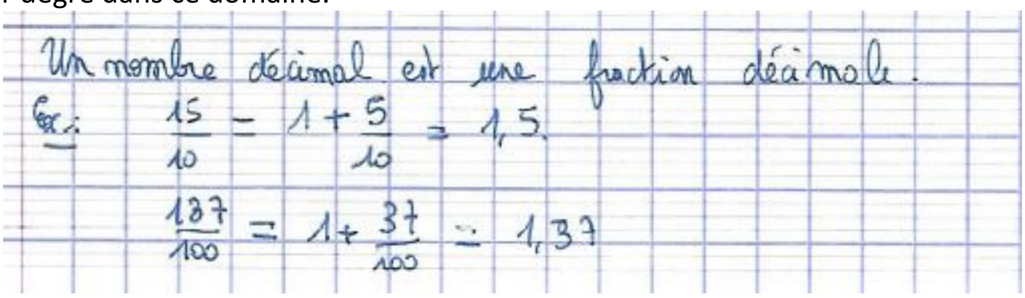
* unité partagée en 1000 : les millièmes. $1 = \frac{1000}{1000}$

$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000}$ ...

. Les fractions dont le dénominateur est un multiple de 10 (10, 100, ... 1000...) sont des fraction décimales

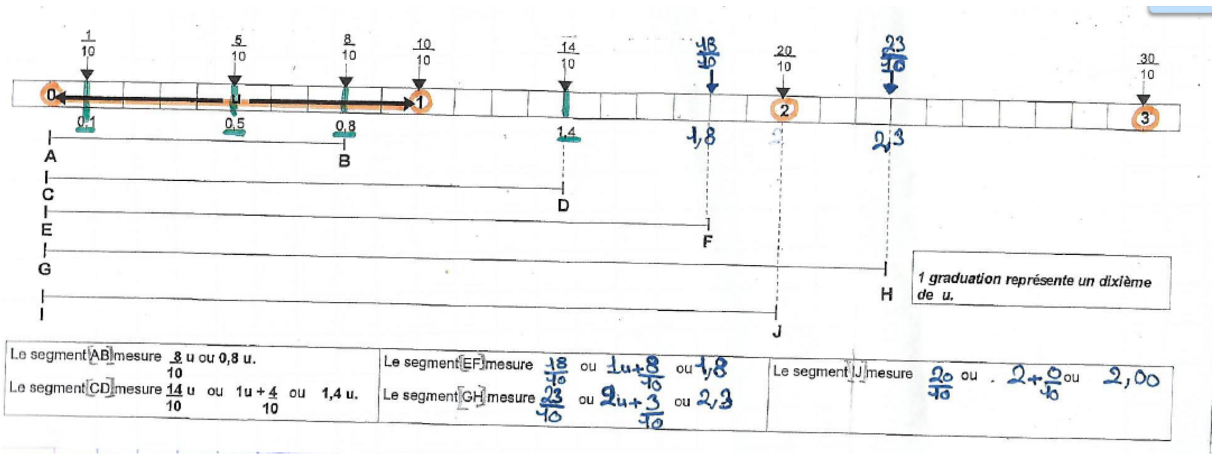
4.3.3 Partie C : vers des écritures différentes et la droite graduée.

La suite de ces EC écrites est constituée d'un rappel d'exemples vus en classe pour montrer le jeu des écritures entre fractions décimales et écritures à virgule. Le texte consiste uniquement à l'exposition d'un exemple sans discours associé. Puis, toujours à titre d'exemple une droite graduée est présentée comportant une suite de nombres placés sur cette droite. Cet écrit a le statut d'EC car il est collé dans le cahier de cours sûrement pour montrer une tâche emblématique (souvent évaluée dans les évaluations nationales) du premier degré dans ce domaine.


Un nombre décimal est une fraction décimale.

Ex : $\frac{15}{10} = 1 + \frac{5}{10} = 1,5$

$\frac{137}{100} = 1 + \frac{37}{100} = 1,37$

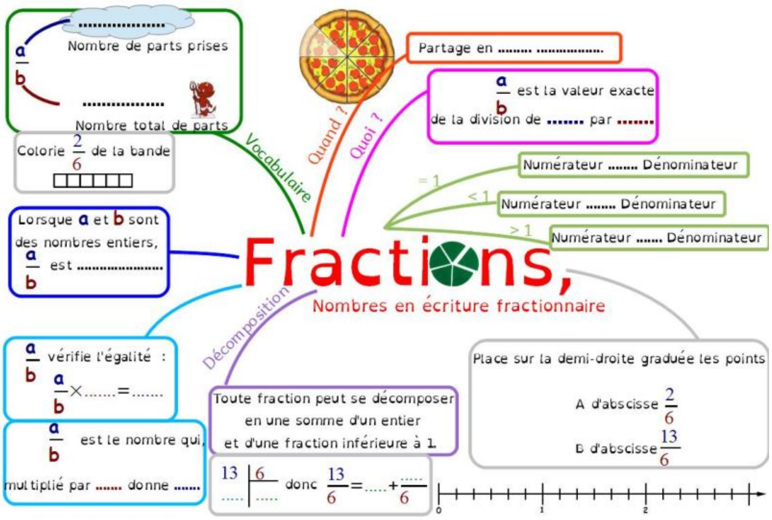


Nous pouvons lire de nouveau des écritures qui ne sont pas homogènes : $2u+\frac{3}{10}$..
La règle semblerait être que la lettre u est juxtaposée aux nombres entiers. La présence de ce u est alors un rappel sur la construction de ce nombre 2 à partir de fractions de l'unité.
Ce 2u contient deux fois la bande unité.

4.3.4 Des EC de synthèse sous forme de carte mentale.

L'année (4) Sasha sollicite ses élèves pour qu'ils construisent ce qu'elle nomme des cartes mentales. Sasha propose un mot d'un domaine des mathématiques : nombres décimaux et les élèves doivent écrire tous les autres mots (liés à des concepts) qu'ils mettent en lien avec le mot de Sasha.
Pour construire ces cartes mentales, les élèves sont invités à écouter sur les tablettes numériques les « *capsules* » construites par le professeur. Certaines sont aussi proposées par Canopé[103] intitulées les fondamentaux. Les capsules du réseau canopé présentent sous forme d'un dessin animé, une sorcière verte appelée « *Paclair* » qui expose des connaissances. Nous n'avons pas analysé le contenu de ces capsules. Nous en signalons juste ici l'existence car elles méritent d'être consultées et d'être analysées.
Enfin une autre carte mentale est donnée qui provient d'un blog de professeur de collège. Dans l'exemple de Sasha (Annexe 19) le dessin de la pizza est remplacé par celui d'une bande grisée. Les encadrés, exceptés ceux qui expriment que a/b est le nombre qui multiplié par…donne…. ne sont pas exploités. Les encadrés exploités correspondent au contenu des EC de Sasha. Cependant ces EC dépassent les recommandations des programmes : « *a/b est la valeur exacte de la division de 3 par 6* ». Nous n'avons aucun moyen d'évaluer l'impact dans le PI de ces cartes mentales. Nous ne pouvons que signaler les fonctions de ces dernières dans le PI sans aucune évaluation possible. Ces cartes semblent être un écrit de synthèse car réalisées en fin d'année scolaire.

[103] *https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques/nombres.html*



4.3.5 Synthèse.

Les EC produites dans ce recueil sont de différents niveaux. Les situations repères représentent des EC car elles font partie du cahier de cours. Elles concourent à soutenir la mémoire didactique de la classe. Ces situations introduites par des questions marquent la volonté de l'enseignante de problématiser les savoirs, de suivre une démarche ayant des ressemblances avec la démarche d'investigation. Ces situations sont aussi des moments importants dans le PI de Sasha dans le sens où elles proposent des recontextualisations et une montée en généralité (plus ou moins assumée). Ces « *situations-repères* » sont à faire individuellement, elles sont alors un moyen de régulation pour Sasha en lui permettant de repérer les élèves en difficultés. Elles participent également à la dépersonnalisation des savoirs car les élèves sont contraints d'utiliser la procédure experte.

L'étude du contenu de ces situations nous a montré qu'il y avait des imprécisions dans les écritures ou les définitions. Le dispositif créé par Sasha retient toute notre attention et nous constatons que le manque de texte de savoir de référence ne permet pas d'exploiter a-maxima le dispositif créé.

Les autres EC sont assez générales avec des degrés de décontextualisation 1 ou 2. Des exemples sont donnés pour illustrer une règle, ils sont rarement proposés sans discours associé ou règle associée. Enfin en plus de ces EC plus décontextualisées, Sasha propose l'année (4) des écrits de synthèse en fin d'année sous la forme de carte mentale personnelle mais aussi empruntée.

Pour Sasha le PI est plus visible que pour Solène, sûrement à cause des écrits qui offrent une plus grande stabilité des EC à la fois dans leur forme et dans leur contenu.

Que ce soit pour Sasha ou Solène les PI qu'elles instaurent sont dynamiques (car en tension avec les contraintes du terrain), et évolutifs (des changements sur plusieurs années). Leurs projets globaux sont stables. Mais d'année en année des modifications du projet global finissent par avoir des effets sur le local.

5 Etude des EC orales sur deux séances.

5.1 Les données.

Nous avons pu filmer six fois Sasha en trois années. Nous avons filmé :

- une séance sur la multiplication d'un décimal par un entier (problème issu du ERMEL CM2 p.509) : année (1)
- une séance sur les règles de priorités dans les calculs en ligne (problème issu du ERMEL CM2 p.210) : année (2)
- une séance sur le traitement d'un problème de proportionnalité (problème issu du ERMEL CM2 p.333) : année (2)
- la première séance d'introduction des fractions (source non définie) : année (2)
- La première séance d'introduction des fractions décimales (problème issu du ERMEL CM2 p.453) année (3)
- Une autre séance sur les fractions décimales (problème issu du ERMEL CM2 p.463) : année (3)

Ce nombre de séances n'est pas significatif pour retracer et alimenter une description de l'itinéraire cognitif et des EC orales produites sur l'ensemble de l'itinéraire. En revanche il nous permet de donner des éléments liés à la composante médiative de Sasha ainsi que des éléments sur l'exercice de la paix scolaire et la vigilance didactique. Notons que sur 5 des séances filmées sur 6 montrent des activités extraites du ERMEL. Sasha a déclaré à plusieurs reprises ne trouver de l'intérêt qu'à cette seule ressource. Cependant nous n'avons jamais réussi à identifier s'il n'y avait pas entre elle et nous un effet de contrat du type « *un formateur-apprenti-chercheur appréciera plus des séances extraites d'ERMEL* ».

5.2 Description du scénario-type d'une séance de Sasha

5.2.1 Description du canevas global d'une séance

Etape 1 : la mise en activité.

Les six films montrent des classes calmes, le nombre de rappel à l'ordre est faible, voire inexistant. Les six séances ont des déroulements stables que l'on peut décrire ainsi :
-une mise en activité immédiate sans phase de rappel. Sasha débute son cours en donnant la consigne et en présentant le matériel :

Séance sur les règles de priorités dans les calculs en ligne :

« ***Ens1*** *: vous allez utiliser 4 fois le chiffre 3 et vous allez trouver le plus de résultats différents possible en utilisant 4 fois 3. Il y a plusieurs contraintes, on ne peut pas écrire 333. Vous pouvez utiliser toutes les opérations possibles, mais il me faut le plus de résultats différents. Pas d'opérations en colonne, ça, c'est une autre contrainte* »

Ou encore

Séance sur l'introduction des fractions décimales.

***Ens 1** : « Alors voilà, ça, ce sont des bandes de papier découpées dans du papier bristol à petits carreaux, vous allez bien regarder cette bande-là mais pas dans n'importe quel sens. Mais quand vous allez l'étaler pour l'observer, je vous ai mis un petit repère qui est le zéro. Vous allez bien regarder où est zéro et bien la positionner avec ce petit repère-là. Et ensuite, je vous donne une autre bande, celle-ci. »*

Etape 2 : la phase de recherche

Les temps de recherche oscillent entre 10 et20 minutes. Ces phases sont ponctuées par des reformulations de consignes suite à des sollicitations des élèves où à l'oubli d'une contrainte. Les élèves sont souvent en groupes de 4.

Pendant ces temps de recherche, Sasha essaie de rester en retrait. Elle maintient la paix sociale si nécessaire et encourage les groupes d'élèves.

Le travail mené par les élèves est soit exposé sur une ardoise soit sur une grande feuille distribuée à cet effet.

Etape 3 : la phase de mise en commun.

Les phases de mise en commun sont facilement identifiables grâce à la gestion peu commune en CM2 de Sasha. L'enseignante regroupe tous ses élèves assis en arc de cercle au sol à proximité du tableau. Elle affiche toutes les affiches ou accroche toutes les ardoises des élèves (dans la gouttière du tableau). Ces moments-là sont très calmes. Nous n'avons aucun indicateur (si ce n'est le silence et des élèves immobiles) pour justifier de cela mais il nous semble que l'écoute des élèves est à son comble lors de ces instants. Nous n'avons pas de « *passiomètre* » pour évaluer la qualité de l'écoute mais nous ressentons une atmosphère particulière[104]. Elle élimine en premier les procédures trop longues ou erronées en sollicitant l'ensemble du groupe. Puis elle montre et commente les autres travaux pour exposer un peu plus longuement les procédures plus expertes. Sasha expose et hiérarchise les procédures. Elle sollicite les groupes d'élèves concernés pour obtenir une validation de ce qu'elle dit.

Etape 4 : une phase de réinvestissement : la situation repère.

Sasha propose la même consigne que pour l'activité proposée lors de la recherche mais elle en change les valeurs numériques. Ainsi le problème des 3 3 3 devient le problème des 5 5 5. Le travail devient individuel. Les élèves doivent résoudre le problème en utilisant l'une ou les procédures expertes reconnues par le professeur.

Sasha s'occupe alors en particulier des élèves appartenant au groupe qui n'avait pas mené à terme l'activité.

Etape 5 : fin de la séance.

5 séances sur 6 se terminent en fermant le cahier de recueil de leçons après avoir écrit ou collé une EC. Seule une séance se termine sur une justification des raisons de cette séance (les piles de livres, problème sur la proportionnalité ERMEL CM2 p.333). En effet Sasha a modifié malgré elle la séance du ERMEL en agrandissant le support donné par la ressource. Sasha change l'échelle d'un document en l'agrandissant sans se rendre compte qu'alors elle modifie les valeurs des données numériques ce qui change considérablement l'activité. Cette modification des valeurs numériques a une influence sur les procédures des élèves. Nous avons pu à cette occasion voir les mêmes effets que lors des séances de Solène (chapitre 6) :

---

[104] *Ceci est un commentaire peu scientifique et très intuitif.*

les élèves s'agitent, l'enseignante répète en boucle les consignes, elle ne comprend pas que les élèves n'arrivent pas se lancer dans l'activité et n'arrive pas à en analyser à chaud les raisons.

5.2.2 Synthèse

Les six séances filmées se déroulent selon le même canevas. Le changement de posture de l'enseignante est visible à partir de l'étape 3, c'est elle qui hiérarchise les procédures et qui fait venir certains groupes au tableau pour expliquer leur démarche. En quelque sorte, elle reprend « *la main* », elle s'autorise des ajouts (en termes de vocabulaire mais aussi dans les formalisations).

5.3 Séance sur l'introduction des fractions en CM2

5.3.1 Analyse a priori de l'activité.

Nous n'avons pas retrouvé la trace de cette activité dans les ressources que Sasha déclare utiliser. Nous faisons l'hypothèse qu'elle s'inspire d'un ensemble de situations intitulées « *la bande unité* » dans le ERMEL CM1.

L'analyse ne peut alors être faite qu'à partir des données des transcriptions.
Les élèves en groupe de 4 vont avoir à leur disposition une bande unité préalablement graduée en tiers. À l'aide de cette bande ils vont avoir à exprimer la mesure de la longueur de la grande bande en utilisant l'unité donnée.
La grande bande est orientée dans le sens où figure une graduation « 0 » à l'extrémité gauche de la bande. La mesure de la longueur de la bande ne s'exprime pas à l'aide d'un nombre entier mais d'une somme d'un entier et d'une fraction de l'unité.
Une seule procédure est possible : reporter à partir de la graduation 0 autant de fois que nécessaire la bande unité.
La marge de manœuvre pour les élèves est dans l'expression de la mesure. Cette mesure peut être donnée en exprimant le nombre de report du tiers : dans ce problème 14 fois un tiers. Elle peut aussi être exprimée en quatre fois trois tiers et deux tiers ou encore en 4 reports d'unité et 2 tiers de l'unité.
Cette activité permet :
- d'instrumentaliser la bande unité.
- de construire une droite graduée
- d'établir des équivalences d'écriture.

5.3.2 Reconstitution des EC orales à partir de la transcription de novembre 2012.

Passation des consignes : vers la dévolution … C'est une bande unité et l'unité vaut 1 [EC_{rmc}]
Première mise en commun avant de relancer la recherche : mise au point. La bande n'est pas découpée, elle est partagée en parts égales [EC_G]. Ici elle est partagée en trois. [EC_{rmc}] Ce partage peut s'exprimer en fractions c'est un tiers, deux tiers et trois tiers. [EC_{rmc}] J'ai tous mes morceaux <u>sur trois</u> [EC_{rmc}]

La bande peut être utilisée comme un gabarit [énoncé de méthode assez général]
Mise en commun après la phase de recherche 14 tiers c'est la même chose que 4 unités et deux tiers. [EC_G]. On a trouvé ainsi la partie entière. [EC_G]. La partie entière c'est le nombre d'unités obtenu au total. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]. Deux tiers c'est plus petit que 1. [EC_G]. Un dénominateur c'est le nombre de parts obtenu suite au partage. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]. Le dénominateur c'est le partage que j'ai effectué de mon unité. [EC_G]. Mon unité est partagée en trois parts égales. [EC_{rmc}] C'est ce qu'on a obtenu sur la totalité des parts de mon unité partagée.(tentative de EC_G échouée et commentée par Sasha « *Oh, la la, c est pas très clair.* ! »
Phase de recontextualisation : situation repère. $\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}+\frac{2}{3}=4\text{ u}+\frac{2}{3}$. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$]. Ce qu'il ne faut pas faire : Y'a une espèce de confusion avec quatre unités et après quand on a des fractions on n'ose plus écrire des nombres entiers. Il faut forcément écrire des dénominateurs. Ce qu'on peut reconstituer ainsi : il est possible d'additionner des nombres entiers et des fractions (c'est-à-dire des nombres qui ont des dénominateurs) Elle revient sur une erreur d'un groupe qui avait écrit 12/14 pour dire qu'ils avaient reporté 12 fois un tiers (donc 4 bandes unités) sur 14 reports de un tiers.

5.3.3 Analyse a posteriori et synthèse.

Sasha l'exprime à plusieurs reprises dans sa séance, les élèves ont réussi à produire les expressions recherchées. Les erreurs réalisées lors de la première recherche disparaissent lors du travail individuel. Les erreurs des élèves n'étaient pas résistantes et ils acceptent la procédure présentée comme celle à retenir par Sasha. La répétition quasi à l'identique de la situation, ne met pas les élèves en difficulté, ils sont tous en réussite (même si cela est un peu factice).

Sasha prend vraiment ses responsabilités dans le PI et le plus souvent possible propose des EC générales souvent de degré 2.
Les élèves parlent très peu, les interactions sont rares. Il est alors bien plus difficile pour nous d'atteindre ce qui se passe du côté des élèves. De plus le dispositif de Sasha limite très rapidement leur marge de manœuvre.

5.4 Séance sur l'introduction des fractions décimales en CM2

5.4.1 Description de l'activité et éléments d'analyse a priori (voir si pas déjà fait) ERMEL CM2 pp 460

Dans le chapitre 5, paragraphe (3.15), nous avons présenté cette activité que nous avions filmée dans la classe de Solène le 4/02/2013. Sasha propose la même activité.
Nous rappelons les objectifs de cette séance.
Cette activité est extraite du ERMEL CM2 et s'intitule « *graduations* » et a pour objectifs annoncés p 460 :
-comprendre et utiliser le principe de construction d'une graduation régulière en dixièmes et centièmes.
-établir et utiliser les relations entre dixième et unité, dixième et centième
-savoir situer des fractions sur une graduation, les décomposer en somme de la partie entière et de fractions décimales.
Les élèves ont à leur disposition une longue bande de 3 mètres, et une bandelette qui représente un dixième de l'unité. Le zéro est placé à l'extrémité gauche de la bande. Les élèves doivent successivement placer 1 ,8/10, 23/10 et 137/100.
Pour réussir la tâche, ils doivent savoir ce qu'est :
-une graduation
-un dixième de l'unité (et 10/10u=1u)
Ils doivent savoir ce que reporter une bandelette implique comme gestes (juxtaposer la bandelette et ajouter à la mesure un dixième à chaque report).

5.4.2 Reconstitution des EC orales à partir de la transcription de 2013

La séance dure 53 minutes. L'enseignante prend la parole 69 fois soit deux fois moins que Solène et ses prises de paroles sont beaucoup plus longues. Les prises de paroles des élèves sont souvent pour dire qu'ils n'ont pas compris, qu'ils ont perdu du matériel ou encore parce qu'une autre a perdu une dent. Les déroulements de Sasha favorisent plutôt les interactions lors des travaux de groupe. Nous n'avons pas eu accès à ces échanges mais seulement à des bribes assez peu significatives. Les élèves au cours de cette séance ont des difficultés à faire la situation repère, ils ne savent pas comment interpréter 1/10 u=1 cm. L'enseignante finit par leur dire qu'il faut reporter 10 fois la bande de 1 cm comme dans la situation de recherche.

Pour construire une unité il faut utiliser un gabarit et reporter 10 fois la bande. [EC_{rmc}].
10 dixièmes c'est 10 bandes vertes sur 10 : c'est une unité. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$].
20 dixièmes pour avoir deux unités [EC_G]
Une unité peut être partagée en 100 parts égales. [EC_G]
Mon unité contient cent centièmes. [EC_G]
Une fraction décimale a un dénominateur qui est un multiple de 10 par exemple 10, 100, 1000. [EC_G]
1 cm correspond à 1/10 de l'unité, donc 10 cm correspondent à 1 unité [EC_G]

Les EC sont produites lors des mises en commun. Sasha ne fait pas de phase de rappel, elle ne voit pas la « *nécessité puisque tout est écrit* », de plus elle nous explique qu'à tout moment les élèves peuvent sortir et utiliser leur cahier de cours.

Nous pouvons noter une imprécision sur la définition de fraction décimale : dans l'exemple donné le dénominateur d'une fraction décimale n'est pas un multiple de 10 mais une puissance de 10.

Une autre caractéristique des pratiques en fin de cours de Sasha est de demander aux élèves de trouver le titre de la leçon soit en leur demandant directement soit en posant la question « *qu'est-ce que vous avez appris aujourd'hui ?* ». Les six vidéos que nous avons, nous montrent que demander le titre de la leçon correspond aux phases de conclusion de Solène.

Même si parfois la question est la même, ces phases se distinguent de celles de Solène où ce n'est pas ce qu'ils ont fait ou appris qui motive la question mais le besoin d'énoncer l'enjeu de l'activité : soit sous la forme du titre de la leçon, soit en commençant sa phrase par « *je sais que* » (correspond à un rituel installé par Sasha).

Les élèves habitués à donner des titres de leçons proposent :

Je sais placer des fractions sur une bande graduée.

Je sais placer des fractions décimales sur une droite graduée

Je sais placer des fractions décimales sur une droite graduée.

Les élèves interrogés semblent en mesure de donner l'objectif de la séance. Les mots utilisés, malgré des imprécisions s'éloignent de la référence aux matériels. L'enseignante conclut en reformulant : « *je sais placer les fractions décimales sur une droite numérique. »*

Sasha modifie à bon escient l'expression « *fraction décimaux* » en « *fractions décimales* ».

Elle ne reprend pas le terme de **<u>bande</u>** graduée mais préfère utiliser celui de **<u>droite</u>** numérique qui semble être le même objet que droite graduée. C'est ici un exemple de l'exercice de la vigilance didactique de ce professeur.

Mazollier (2010) propose cette définition[105] que nous reprenons :

> *« La droite numérique est un outil privilégié pour renforcer la compréhension de l'ordre des nombres, en particulier la position des nombres par rapport aux dizaines, centaines… entières ou encore les rapports entre nombres (sur une ligne graduée à partir de 0, 32 est situé 4 fois plus loin que 8 par rapport à 0). Mais, il faut au préalable apprendre à s'en servir. Il y a une grande différence entre la bande numérique utilisée aux cycles 1 et 2 et la droite graduée. Dans la première, les nombres sont écrits dans des cases, dans la seconde, les nombres repèrent des positions placées à intervalles réguliers (dans le cas de certaines droites numériques, ces intervalles ne sont pas réguliers).*
>
> *Comprendre l'utilisation d'une droite graduée sous-entend d'avoir compris un certains nombres de propriétés :*
>
> *- elle a une origine qui est ou non représentée,*
>
> *- elle contient tous les nombres d'un intervalle, qu'ils soient écrits ou non,*
>
> *- elle est orientée de gauche à droite (le sens de lecture) mais peut-être utilisée dans les deux sens,*
>
> *Elle modélise la suite des nombres et leurs relations arithmétiques du type double, tiers… (lorsque les graduations sont régulières) ».*

[105] *http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffQpeRep.asp?CleFiche=P213-1*

Dans une conversation suite à une observation de classe, Sasha nous explique que la construction de la droite graduée est fondamentale dans son enseignement des mathématiques.

6 Comparaison des pratiques de Solène et de Sasha.

Dans les paragraphes précédents, nous avons donné des éléments de comparaison des pratiques des deux enseignantes quant au déroulement du PI. Dans les suivants nous proposons des éléments de comparaison en nous appuyant sur une séance construite à partir de la même ressource.

6.1 Comparaison d'une même séance sur les fractions décimales.

6.1.1 Les EC orales produites lors de la séance sur l'introduction des fractions décimales de Solène.

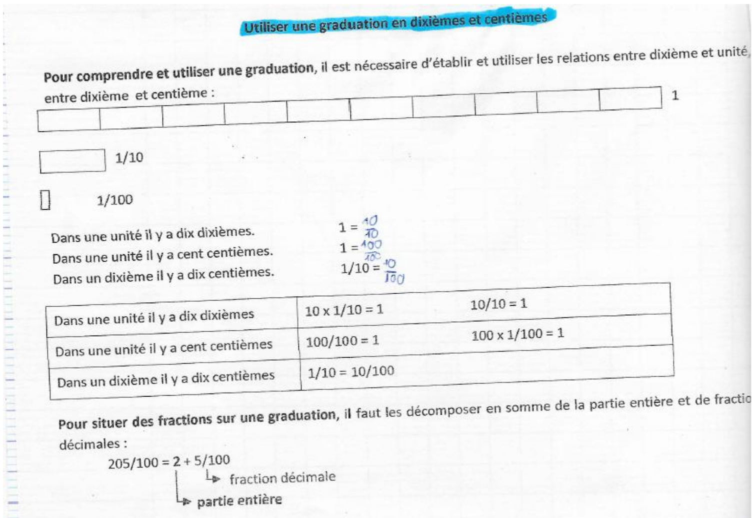
Nous avons déjà évoqué, sans montrer la reconstitution des EC cette séance dans le chapitre 4. Cette séance montrait comment le statut de nombre se construisait dans le PI de Solène grâce à l'introduction de la droite graduée. Cette séance a lieu plusieurs mois après l'introduction des fractions usuelles.

Phase de rappel induite (mais à distance) Trois cinquièmes c'est une fraction. On peut dessiner les fractions comme une bande découpée en cinq morceaux et on en prend trois. [EC_{rmc}]. Trois cinquièmes s'écrit 3/5 [EC_G] Une unité peut être découpée en cinq morceaux de même longueur. Pour trois cinquièmes tu prends trois morceaux. [$EC_G \rightarrow EC_{rmc}$].
Début de la recherche. On peut construire des graduations : on prend la mesure entre deux points. L'écartement entre les graduations est toujours le même. [EC_G] C'est comme les règles graduées en cm ou en mm. [EC_{Nc}].
Mise en commun et conclusion. Pour avoir une unité il faut 10 de dixièmes. [EC_G] 1u=10/10 [$EC_{rmc} \rightarrow EC_G$]. Une unité c'est 100 centièmes [EC_G].Pour faire cela L'idée de plusieurs groupes c'est de couper un dixième en 10 donc 10 centièmes. [EC_G] Une unité c'est 10 fois un dixième mais aussi 10 fois dix centièmes. [EC_G] 137/100 c'est compris entre une unité et deux unités [EC_G]

Le caractère diffus des EC orales de Solène se retrouve. Des EC orales sont produites à chaque phase de la séance alors que pour Sasha elles sont produites lors des mises en commun et pendant l'écriture ou la lecture de la leçon.

6.2 Comparaison des EC écrites.

La différence essentielle des deux PI est la place des EC écrites. Pour Sasha, ces EC écrites sont fondamentales et sont la clé de voute du PI.
Sasha propose un écrit sur les fractions décimales placées sur la droite graduée ce qui lui permet d'établir des équivalences entre unité, dixièmes et centièmes. Solène propose également une Ec écrite dont nous décrivons les caractéristiques ci-dessous.
Dans le texte de Solène, aucune référence n'est faite à l'activité de classe. Le texte rappelle que « *pour comprendre et utiliser une graduation, il est nécessaire d'établir et d'utiliser les relations entre dixièmes et unité, entre dixièmes et centièmes* ». Une bande graduée (et non une droite) est proposée en exemple. Suite à ce texte, plusieurs équivalences d'écriture sont données entre unité, dixièmes et centièmes.
Aucune définition de ce qu'est une fraction décimale n'est donnée dans le texte de Solène. Nous rappelons que celle proposée par Sasha était inexacte mais indiquait tout de même en quoi ces fractions se distinguaient des fractions dites simples (par la valeur de leur dénominateur.)


Utiliser une graduation en dixièmes et centièmes

Pour comprendre et utiliser une graduation, il est nécessaire d'établir et utiliser les relations entre dixième et unité, entre dixième et centième :

1

1/10

1/100

Dans une unité il y a dix dixièmes. $1 = \frac{10}{10}$
Dans une unité il y a cent centièmes. $1 = \frac{100}{100}$
Dans un dixième il y a dix centièmes. $1/10 = \frac{10}{100}$

Dans une unité il y a dix dixièmes	10 x 1/10 = 1	10/10 = 1
Dans une unité il y a cent centièmes	100/100 = 1	100 x 1/100 = 1
Dans un dixième il y a dix centièmes	1/10 = 10/100	

Pour situer des fractions sur une graduation, il faut les décomposer en somme de la partie entière et de fractio décimales :

205/100 = 2 + 5/100
→ fraction décimale
→ partie entière

Dans le texte de Solène élaboré suite à un nombre plus important de séances sur les fractions que Sasha, la référence à l'unité de mesure u a disparu. Dans le projet de Sasha cette référence demeure et l'embarrasse.
Globalement les EC communes à ces deux textes sont : les équivalences entre l'unité, les dixièmes et les centièmes. Le rappel de l'activité d'introduction des fractions décimales se réalise en s'appuyant sur un dessin de la bande pour les EC de Solène et dans la situation-repère de Sasha.
La place importante des EC écrites de Sasha l'a conduite à ne pas proposer de phases de rappel en introduction des séances. Les EC de Sasha ont donc des effets sur le déroulement dans la classe. Les EC écrites de Solène pointent pour elle, les seuls éléments du programme qui lui paraissent nouveaux.
Il y a une cohérence entre les EC orales et écrites, leurs contenus sont proches. Solène ajoute juste qu'entre deux unités consécutives on peut placer une fraction décimale « *137/100 c'est compris entre une unité et deux unités [EC_G]* ». Elle anticipe ainsi sur l'activité

suivante.[106] Sasha ajoute à l'oral comme à l'écrit une définition de ce qu'est une fraction décimale.
Nous retrouvons donc le besoin de définir pour Sasha et le besoin de ne pas perdre le contexte de Solène.

7 Conclusion

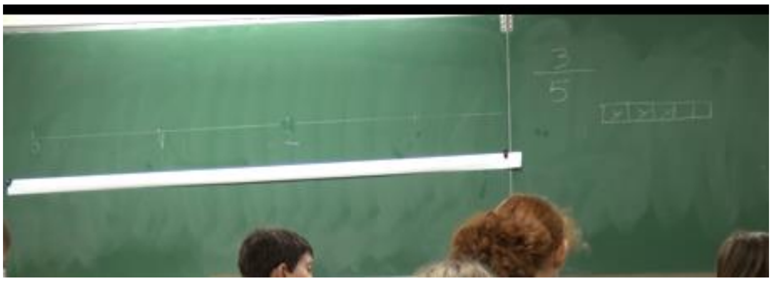
L'étude des pratiques de ces deux PEMFs nous permet d'établir des résultats du côté de l'enseignement des fractions d'une part et du côté des pratiques lors des moments d'exposition de connaissance d'autre part.

7.1 L'enseignement des fractions

Les deux PEMFs n'ont pas les connaissances didactiques leur permettant de distinguer les différents aspects des fractions. Ils sont connus en acte. Ces deux enseignantes introduisent d'abord l'aspect partie d'un tout puis l'aspect mesure. Sasha introduit l'aspect quotient de manière maladroite en expliquant que la fraction est une division. Solène ne s'autorise pas cela, elle explique pour répondre à la question « *qu'est-ce qu'une fraction pour toi ?* » : « *c'est un nombre, mais je ne sais pas expliquer pourquoi. Je sais que j'ai vu ça à l'IUFM, je l'ai intégré mais je ne sais pas le justifier* »
Solène propose une progression dans l'introduction des fractions usuelles, les fractions des dénominateurs pairs sont traités (2, 4, 8) en premier puis les fractions des dénominateurs impairs (3.6). Une hiérarchie est alors installée (les dénominateurs impairs semblent plus difficiles) liée à la difficulté à plier le matériel. Nous pensons que cette hiérarchie peut être à l'origine de difficultés conceptuelles. Solène, nous fait remarquer (le23/07/2015) à la lecture de ces lignes, qu'elle ne faisait que suivre les deux ressources et qu'effectivement c'est plus simple de plier une bande en deux et en quatre. Elle ajoute que le passage au tiers et au sixième se fait facilement car ils ont compris avec les demis et les quarts. Elle exprime alors la confiance accordée aux élèves dans leurs capacités à réaliser seuls les montées en généralité.
Sasha quant à elle réintroduit[107] les fractions en faisant mesurer une bande à l'aide d'une bande unité graduée en tiers. Dans leurs discours, l'une dira que les bandes sont partagées l'autre qu'elles sont graduées.
L'une articule l'aspect partie d'un tout et mesure (partagée) vers le nombre, l'autre l'aspect mesure et nombre (graduée).
Solène utilise sur plusieurs séances les bandes et introduit très progressivement la droite graduée en la dessinant au-dessus de la bande.

[106] *Que nous avons filmée mais qui ne fait pas l'objet de notre étude.*

[107] *Car traitées en partie en cm1 avec une autre enseignante que nous ne connaissons pas.*



Sasha trace la droite sur la bande de papier et la fait disparaître très rapidement. Quoi qu'il en soit il y a une véritable prise en charge de la construction de l'ostensif (droite graduée).
La construction de cette droite est primordiale car c'est grâce à elle que le statut de nombre est atteint. Pour mener à bien leurs projets les deux enseignantes pensent à instrumentaliser la bande.
Les points que nous soulevons montrent que leur vigilance didactique s'exerce en acte. C'est bien leurs années d'expertise et leurs différents dispositifs de régulation (situation repère et phase de rappel induite et provoquée) qui leur ont permis de construire en acte leur vigilance didactique (et certainement aussi lors des actions de formation).
La description du PI montre les difficultés qu'elles ont avec l'introduction et la « *disparition* » justifiée ou non de l'unité et des confusions autour d'unité de mesure, du mot unité et du nombre un.

7.2 Les pratiques et la mise en œuvre du PI

Sasha et Solène ont des projets qui globalement se ressemblent. Elles proposent souvent des activités robustes adaptées aux élèves. Elles introduisent les fractions dans un contexte de mesure en utilisant une bande-unité. Elles aménagent une séance d'instrumentalisation de la bande unité. Elles ont mis au point des dispositifs de régulation. Sasha en s'appuyant sur les situations repères et Solène en s'appuyant sur des phases de rappels dans lesquelles elle incite les élèves les plus en difficultés à « *raconter l'histoire de la séance précédente* ».
Elles animent des mises en commun. Pour Solène ces temps-là sont parfois plus longs et moins hiérarchisés (elle fait passer souvent tous les groupes). Elles ont le souci de prendre en charge leur part de responsabilité dans le PI. Sasha en écrivant de nombreuses leçons et par l'intermédiaire de ces situations repères et Solène par la prise en compte des interactions avec les élèves et des phases de conclusion ritualisées. Les pratiques de ces deux professeurs relèvent bien du i-genre 3.
Nous soulevons que l'exercice de leur vigilance didactique est parfois mis en défaut lorsqu'elles s'avancent à adapter les activités du ERMEL et conduisent à des « *quiproquos didactiques* ».
Les deux PEMFs développent bien un PI. Cependant, les EC écrites n'ont pas le même rôle dans les PI développés. Les EC de Sasha sont plus faciles à débusquer, le PI qu'elle propose semble plus abouti car nous pouvons en suivre le fil malgré le peu de séances filmées. Les EC sont bien étiquetées en tant que telles puisque écrites dans le cahier-mémoire. Elles ne sont pas improvisées puisque reprises d'une année sur l'autre. Sasha essaie d'assurer une validité de son contenu mathématique en se tournant vers des ressources en ligne de professeurs du second degré.
Le PI de Sasha semble se développer un peu plus du côté de la dimension cognitive et interne de l'apprenant tandis que celui de Solène se développe essentiellement dans la

dimension sociale. Pour autant les deux PI ont des développements dans les deux dimensions qui semblent être en tension. Il s’agit de trouver l’équilibre entre elles.
La dépersonnalisation dans la classe de Solène a lieu par la « *puissance du groupe* » et grâce à de nombreuses interactions. Dans la classe de Sasha, cette dépersonnalisation a lieu en acceptant le contrat établi par l’enseignante en essayant d’adopter très rapidement une procédure tout juste découverte pour certains élèves et passe par le biais du dispositif mis en place au travers des « *situations-repères* ».
La décontextualisation est plus accompagnée dans le PI de Sasha. Les PI de Sasha et de Solène ne proposent pas de changement de cadre bien visible. Pour autant elles passent de la construction de la fraction « *partie d’un tout* » à la « *fraction mesure* » pour présenter la fraction comme un nombre grâce à la construction de la droite graduée. Tout leur projet se déroule avec des grandeurs continues.
Nous pensons que ces enseignantes ont des connaissances mathématiques et didactiques qui se renforcent ou sont acquises sur le terrain. Nous suggérons que certaines des connaissances didactiques acquises sur le terrain sont en acte. Elles ont été construites à force d’observation. Comme elles sont en acte, elles ne sont pas nécessairement reconnues et reprises d’une année sur l’autre.
Nous ne pouvons conclure sur l’efficacité de tel ou tel dispositif. Nous avons, tout de même, demandé aux deux enseignantes de nous communiquer les résultats des évaluations nationales pour l’année (4). La classe de Sasha obtient le score de 85 pour cent avec aucun élève sous la barre des 33 pour cent de réussite. La classe de Solène obtient le score de 82 pour cent avec un élève en dessous de la barre des 33 pour cent (un de ceux qui avaient une AVS).
Ces résultats les placent au-dessus de la moyenne du département et au-dessus de la moyenne nationale (comparaison possible seulement avec les résultats des évaluations 2012).
Nous rappelons que les composantes sociale et institutionnelle sont très proches. Les résultats aux évaluations nationales sont identiques malgré des PI qui ne se développent pas dans les mêmes dimensions. Nous pensons que la présence d’un dispositif de régulation et d’une prise en charge en termes de responsabilités partagées (élèves-enseignants) du PI contribue à ces résultats.

Chapitre VIII – Gwen et Julien : analyse et comparaison des expositions de connaissances écrites et orales.

Ce dernier chapitre a pour principal objectif de décrire, d'analyser et de comparer le PI d'autres PEMFS. Ce chapitre va nous permettre d'illustrer une dernière fois la variété des PI selon les enseignants. Nous avons suivi ces enseignants sur quelques mois seulement car nous les avons rencontrés l'année du passage du CAFIPEMF. Ils étaient alors assez peu disponibles. Nous présenterons ces deux enseignants moins expérimentés. Nous préciserons également les données que nous avons recueillies.
Nous allons tout d'abord présenter les EC écrites puis orales d'un PEMF, Gwen. Puis celles réalisées par Julien.

1 Rappel et présentation des données.

1.1 <u>Présentation des enseignants.</u>

Les deux enseignants dont nous allons étudier les PI, sont moins expérimentés que Sasha et Solène. Ils ont exercé 5 ans. Gwen et Julien sont titulaires d'une licence STAPS. Ils ont tous les deux un bac S.
Gwen a toujours travaillé dans la même école en zone difficile et seulement en cycle 3. Julien a essentiellement complété des quarts de temps et des mi-temps de directeurs. Il était moins libre de ses choix : il n'a pas toujours eu la possibilité de choisir la taille et le format des cahiers. Il n'a pas non plus toujours la possibilité de choisir les manuels ni parfois de choisir les matières qu'il souhaite enseigner. Julien a exercé une année en tant que conseiller pédagogique en EPS[108] et souhaite retrouver un poste équivalent.
Les années où nous les avons suivis étaient celles qui correspondaient au passage de l'examen.

1.1.1 Recueil des données.

<u>Classe de Gwen</u>

Recueillir des données dans la **<u>classe de Gwen</u>** n'a pas été facile car l'Inspectrice ne souhaitait pas que nous intervenions dans la classe de son candidat tant qu'il n'avait pas passé les épreuves en classe. Gwen a réussi très brillamment la première partie de son examen, ensuite il a été encore plus difficile de le joindre et de communiquer avec lui.

[108] Il était « faisant fonction » c'est-à-dire qu'il n'avait pas le diplôme (le CAFIPEMF) lui permettant de continuer à travailler sur ce type de poste.

L'année qui suivra, il quittera définitivement la classe pour être conseiller pédagogique de circonscription. Il est parfois responsable des formations en mathématiques.

Nous avons donc pu recueillir deux séances filmées : la première séance sur les fractions en CM2 et l'autre sur les mesures de volume. Du côté des documents écrits, nous avons un cahier de leçons qui date de 2008-2009 et les photocopies d'un cahier de leçons de 2011-2012, les fiches de préparation sur la séquence des fractions et des écrits d'élèves pour l'année 2011-2012. Les élèves, à l'issu de chaque fin de cours devaient écrire ce qu'ils avaient appris en fin de séance. Ce protocole a été suivi un trimestre. Nous nous étions accordés sur cette possibilité de faire écrire les élèves car Gwen se demandait comment avoir accès à ce qu'avaient retenu ses élèves de ses séances.
Gwen ne connait pas les ressources ERMEL, Cap Math ni Euro Maths. Il utilise un manuel « *A Portée de Maths* »[109] qui est écrit par des professeurs des écoles et un conseiller pédagogique.

<u>Classe de Julien.</u>

En 2013-2014, nous sommes rentrée en contact avec Julien. Julien avait accepté de filmer pour nous toutes les séances sur les fractions. Julien n'a pu filmer les premières séances car elles correspondaient à ce qu'il voulait montrer le jour de l'examen. Il n'était bien sûr pas possible de le filmer ce jour-là.
Malheureusement, ensuite, la caméra[110] a enregistré soit le son soit l'image et plus souvent l'image que le son. Au final, nous avons deux séances filmées sur les fractions dont une vraiment exploitable.
Nous avons recueilli les cahiers d'exercices et de leçons pour cette même année. Nous avons les fiches de préparations sur les fractions. Julien nous a sollicitée pour construire son projet sur cet enseignement. Il répond très facilement aux questions et les échanges par mail sont assez nombreux. Cet enseignant choisit, après nos échanges de travailler avec ERMEL et EUROMATHS. Il utilise aussi des ressources en ligne pour construire ses EC écrites.
Nous avons pu visionner ensemble une des séances sur les fractions, ce qui a été pour nous une opportunité, provoquée certes mais très enrichissante. Julien à chaud, nous expliquait a posteriori ses choix pendant la séance.
Julien réussit aussi très brillamment son examen et deviendra conseiller pédagogique en EPS en 2014-2015.

L'ensemble de ces données (Annexes 25, 26 et 27) nous permet de reconstruire le projet global d'enseignement des fractions pour ces deux enseignants. Les données filmées ne sont pas pour nous significatives des pratiques de ces professeurs. Elles vont toutefois nous permettre pour un instant donné de montrer comment les expositions de connaissances peuvent avoir lieu dans des classes de professeurs moins expérimentés. Bien sûr, nous regrettons de ne pas avoir pu suivre leurs évolutions.

[109] http://medias.hachette-livre.fr/media/contenuNumerique/Telechargement/10/1844661438678034.PDF, consulté le 8 août 2015.

[110] C'était la caméra personnelle de Julien.

2 Présentation de l'ensemble des EC écrites dans la classe de Gwen.

2.1 Description des cahiers de leçons de Gwen.

Gwen fait écrire des EC dans un cahier de dimensions 21x29,7cm. Sur la première page de ce cahier des informations indique le nom de l'élève, l'année scolaire et précise que ce cahier est celui : « *de leçons de Français et de Mathématiques* ». La première partie du cahier est consacrée aux leçons de français tandis que la deuxième partie est celles des leçons de mathématiques. Pour Gwen ce sont donc bien des leçons qui sont écrites dans ce cahier. Sasha avait donné un nom à ce cahier « *cahier mémoire* » qui représentait plutôt sa fonction que ses contenus. Il n'y a pas de sommaire proposé. Pour nous la présence d'un sommaire est une indication de la possible utilisation du cahier car un sommaire permet de se retrouver plus rapidement dans le document. Les leçons sont donc écrites les unes à la suite des autres dans l'ordre chronologique. Elles sont numérotées selon le code suivant :
M (mesure), N (numération), Géom (géométrie), C (calcul). Il n'y a pas de « *leçons* » pour le domaine : organisation et gestion de données. A priori, il n'y a pas non plus de lien effectué entre grandeurs et mesures. Les EC écrites sont assez « *courtes* » entre un quart de la page et une moitié de page.

2.2 Reconstitution des sommaires et comparaison.

Nous allons reconstituer les sommaires pour l'année 2008-2009 (année (1)) et l'année 2011-2012 (année (3)). Gwen avait conservé un cahier de leçons d'un élève car il a ainsi une trace, un modèle sur lequel il peut s'appuyer. Ce cahier d'élève est une ressource pour l'enseignant car il va réutiliser ce cahier d'année en année en y apportant parfois des modifications.

Cahier de leçons de Gwen : année 2008-2009	Cahier de leçons de Gwen : année 2011-2012
1. M1: les longueurs	*1.* C1 : l'addition des nombres entiers
2. C1 : l'addition des nombres entiers	*2.* Géom1 : droites, demi-droites et segments
3. G1 : la droite	*3.* M1 : les mesures de longueurs
4. M2 : les longueurs (2)	*4.* N1 : pour écrire en lettres
5. N1 : les nombres	*5.* M2 : le périmètre (formules)
6. C2 : les tables de multiplication	*6.* Géom2 : les droites perpendiculaires
7. G2 : les droites perpendiculaires, sécantes et parallèles.	*7.* N1 : lire et écrire des fractions.
8. C3 : la multiplication des nombres entiers.	*8.* N2 : dire si une fraction est inférieure, supérieure ou égale à 1.
9. M3 : les masses (1)	*9.* C2 : la multiplication des nombres entiers
10. C4 : Technique de la multiplication	*10.* Géom3 : les polygones
11. M4 : les masses (2)	*11.* Géom4 : les triangles
12. N3 : les Fractions(1)	*12.* M3 : les angles
13. G3 : les polygones (1)	*13.* M4 : les mesures de masses

14. G4 : les polygones (2)	*14.* Geom5 : les quadrilatères
15. M5 : les capacités	*15.* Géom6 : le cercle
16. G5 : les quadrilatères (1)	*16.* N3 : les nombres décimaux
17. G6 : les quadrilatères (2)	*17.* M5 : Mesures d'aires
18. M6 : les mesures de durées	*18.* Géom7 : la symétrie axiale, la symétrie centrale
19. G7 : les triangles	*19.* M6 : les mesures de durées
20. M7 : les mesures de durées (2)	*20.* M7 : les mesures de temps
21. G8 : les propriétés des triangles	*21.* Géom8 : les solides
22. M8 : Mesure de temps	
23. G9 : le cercle	
24. G10 : les solides(1)	
25. G11 : les solides(2)	
26. M9 : le périmètre	
27. G12 : la symétrie	
28. G13 : la symétrie axiale	
29. M10 : les aires (1)	
30. G14 : la symétrie centrale	
31. M11 : les aires	
32. C3 : effectuer des calculs avec des nombres décimaux.	
33.	

2.3 Analyse et comparaison entre les deux années.

Comparaison globale.

L'année (3), il semble y avoir moins d'EC écrites. C'est un constat du tableau ci-dessus. Les leçons sont plus longues et regroupées l'année (3). Les leçons en géométrie (de 13 à 8 leçons) et sur les mesures (de 8 à 7 leçons) sont plus fréquentes qu'en calcul (2 à 3 leçons) et numération (3 leçons). Ainsi l'année (1), il y avait trois leçons sur la symétrie alors que l'année (3) il n'y en a plus qu'une. L'année (3), Gwen regroupe ces trois leçons. Il en est de même pour les solides, les quadrilatères, les aires…
Les titres de ces leçons présentent globalement le savoir en jeu. Ils sont parfois plus précis : par exemple l'année (1) une leçon s'appelle « *les longueurs* » et l'année (3) : « *les mesures de longueurs.* ». Nous remarquons aussi des « *disparitions* » de certains textes et des apparitions d'autres textes. L'année (1), il n'y a pas en numération d'EC écrites sur les nombres décimaux alors que l'année (3) il y en a une.
Ces variabilités montrent bien que l'enseignant est en « quête » d'amélioration de son projet tout en bâtissant sur ce qu'il a construit les premières années.
De nombreuses EC sont produites sur la mesure : mesures de longueur, de masse, de capacité, de durée et de temps(?). Nous pouvons aussi relever qu'aucune EC n'est produite sur la proportionnalité. Nous n'arrivons pas à expliquer certains choix : des EC sont produites sur l'addition des nombres entiers (programme du cycle 2) mais pas sur la soustraction. De même il y une leçon l'année (1) sur la multiplication d'un nombre à trois chiffres par un nombre à un chiffre mais aucune leçon sur la division. L'année(1) l'addition, la soustraction et la division des décimaux sont abordées alors que l'année (3) aucune EC n'est produite.

Enfin, nous notons plusieurs confusions entre grandeurs et mesures. Un titre de leçon a retenu notre attention : « *mesures de temps* » qui suit la leçon sur « *mesure de durées* ». Cette leçon donne une liste de calculs à faire pour pouvoir convertir les minutes en secondes (annexes 25 et 26). Ainsi nous pouvons lire :

Conversion minutes → secondes
36minutes = (36x60) s
= 2160 s

Enfin, il y a plusieurs leçons aux limites du programme. Les leçons sur l'addition des nombres entiers (plutôt fin de cycle 2 ou encore début de cycle 3) ou des leçons sur la symétrie centrale (programme du collège).

Les leçons sur la mesure et la géométrie sont des suites de propriétés souvent maladroites. Par exemple, suite aux leçons sur les polygones, Gwen écrit des leçons sur les quadrilatères dont il propose la définition suivante : « *un quadrilatère a 4 côtés, 4 sommets, 4 angles, 2 diagonales.* ». Dans ce cas-là, ce n'est pas une définition mais plutôt une liste de « *propriétés* » visibles.

Voici encore un autre exemple « *les unités usuelles de masses servent à peser la masse de quelqu'un ou quelque chose. Il y a les grammes et les kilogrammes. Pour les petites choses on utilise les milligrammes, les centigrammes et les décigrammes. Pour des choses plus grosses, on utilise les décagrammes, les hectogrammes. Pour les choses très lourdes : le quintal et la tonne.* ». Cet exemple nous montre à quel point l'exercice de la vigilance didactique est faible tant du point de vue des connaissances mathématiques que didactiques. Il y a clairement une confusion entre volume et masse entretenue par les programmes. En résumé, nous avons lu toutes les EC produites et pour chacune d'elles, nous relevons des imprécisions ou des erreurs, des informations qui ne sont pas au programme du cycle 3.

L'étude de ces traces en dehors de celles sur les fractions nous informe sur les mathématiques transmises. Les EC sont souvent des énoncés de méthode ou des suites de définitions illustrées parfois par des exemples. Elles seraient de degré 1[111] mais sont souvent imprécises ou erronées.

Comparaison plus locale : le cas des fractions.

L'année (1), il y a une leçon sur les fractions alors que l'année (3) il y en a 2. Notons toutefois que dans le projet de Gwen, l'étude des fractions décimales n'est pas présente.

Il semblerait que l'enseignement concernant le passage des fractions aux décimaux soit effectué selon la progression suivante : fractions usuelles (leçons 1 et 2) et nombres décimaux (leçon 3).

Les deux séances que nous avons filmées proposent des problèmes dans un contexte de mesure. Nous pensons que pour Gwen les décimaux se construisent en même temps que les mesures. Nous pouvons valider cette hypothèse en analysant ces leçons sur les mesures : elles comportent toutes la présence d'un tableau de mesure. Gwen écrit au sujet des mesures de durées « *Il n'existe pas de **tableau de conversion** des mesures de durées, chaque unité de mesure a une correspondance avec une autre unité : dans une minute il y a 60 secondes* ». Les nombres donnés en exemple sont des entiers.

Certains éléments de la leçon sur les décimaux (annexes 25 et 26) nous permettent de confirmer notre hypothèse. Nous pouvons lire : « *Un nombre décimal est un nombre qui se trouve entre deux nombres entiers : 15.5 se trouve entre 15 et 16. Dans un nombre décimal il*

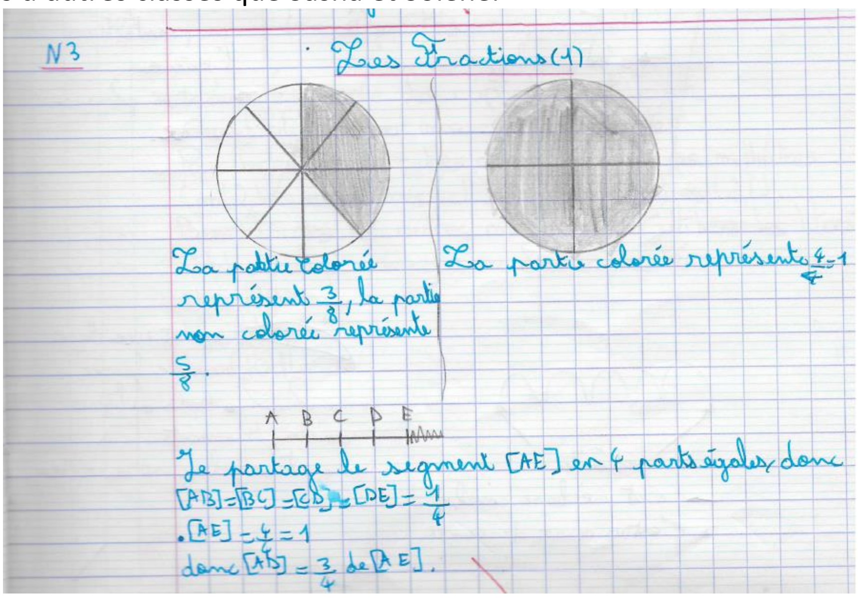
[111] *Enoncés formels.*

*y a deux parties : partie entière et partie décimale séparées par une virgule. Ce nombre se lit quinze virgule cinq. Je peux m'aider d'un **tableau** pour retrouver la valeur de chaque chiffre. (Illustré par un tableau où chaque case représente de la gauche vers la droite : les milliers, centaines, dizaines, unités, dixièmes, centièmes, millièmes)*
Attention un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.»
Cette dernière phrase soulignée par nous n'est pas illustrée d'un exemple. Le lien entre fraction décimale et écriture des décimaux (à virgule) n'est pas essentiel dans le projet de Gwen. Les EC écrites ne présentent pas la droite graduée. Il n'y a pas de lien explicite entre mesure de longueurs et fractions. Enfin lorsque nous demandons à Gwen de citer ses sources il nous explique qu'il s'inspire des écrits de Gérard de Vecchi (2007) et de Brissiaud (1998). Il pense avoir compris la définition de situation problème de De Vecchi. Gwen déclare que les mathématiques doivent toujours faire référence à des situations les plus concrètes possible. Pour Gwen, les problèmes de cocktail et de pizzas à partager sont idéaux pour introduire les fractions pour ces raisons-là.

3 Etude des EC écrites sur les fractions année (1) et année (3).

3.1 L'année (1).

Il n'y a qu'une leçon sur les fractions. Nous avons décrit dans la partie 2, chapitre 4 et 5 de notre thèse un exemple de PI qui comportait peu d'écrits mais s'appuyant sur beaucoup d'oral et de longues phases de rappels. Nous avons pu décrire le PI de Solène car nous avions des données suffisantes sur 5 ans pour l'écrit ou 3 ans pour l'oral.
Le cahier seul de Gwen ne nous permet pas de décrire précisément son PI. Toutefois les EC produites par Gwen illustrent les variabilités et les régularités de ce qui est produit sur les fractions dans d'autres classes que Sasha et Solène.



Description :
L'EC écrite est produite sur une demi-page. Les fractions sont introduites pour coder des portions de surface d'un disque. Les disques sont grisés soit en partie ($\frac{3}{8}$) soit en totalité ($\frac{4}{4} = 1$).

Un autre exemple dans un autre contexte est donné : un segment est partagé en « *quatre parts égales* » ainsi les longueurs des 4 parts sont égales et les élèves écrivent dans leur cahier : « [112][AB]=[BC]=[CD]=[DE]= $\frac{1}{4}$ », une équivalence d'écriture est donnée « [AE]= $\frac{4}{4}$= 1 ». La leçon s'achève sur cette égalité : donc « [AD]= $\frac{3}{4}$ de [AE].

Le segment AE est ce qui se rapproche le plus de l'unité de référence. Dans le premier exemple l'unité de référence était le disque.

Cette leçon s'inscrit dans un contexte de mesure (pour deux grandeurs différentes : longueurs et surfaces). Ce texte ne semble pas avoir à prendre en charge le passage de l'utilisation du matériel vers les nombres. Le texte présente deux contextes illustrés par deux exemples.

Nous ne retrouvons pas les difficultés de Sasha et Solène quant à la gestion d'un apprentissage marqué par l'utilisation de matériel et de bandes unités. Les EC de Gwen ne prennent pas de fait, la gestion de l'unité ni son écriture ni la disparition de celle-là.

La lecture de cette leçon nous conduit à nous demander ce qu'il y a à retenir, à apprendre. Nous n'avons pas les séances filmées correspondantes si bien que nous sommes dans la position d'un adulte (Parents, enseignants) découvrant un texte souvent destiné à être appris. Qu'est-ce qu'il y a à retenir ? : un disque partagé en 4 ou en 8 et un codage associé ? Comment ce codage est-il produit ?

Apprendre ce texte ou tout du moins le comprendre passe par des formulations, des explications qui ne sont pas présentes. Pour une personne extérieure à la classe, les marges de manœuvre sont alors importantes et liées soit au passé scolaire (Pour les parents ou à un vécu scolaire comme enseignante). Nous ne nous posions pas la question pour les autres EC mais la connaissance de leur projet, des ressources que Sasha et Solène utilisaient masquait un peu cette question des accompagnements qui passait alors en arrière-plan.

Nous sommes là, face à un texte produit sûrement à partir une histoire que nous ne connaissons absolument pas. Pour l'année (1), nous n'avons aucune idée de l'itinéraire cognitif. Il nous est alors impossible d'anticiper et de donner du sens à cet écrit. Nous ne savons pas quel est son rôle dans le PI (régulation, rappel, présentation d'une nouvelle connaissance ?). Est- ce un écrit intermédiaire écrit avec les élèves ou non ? En revanche, nous pouvons dire que les élèves voient des disques, des surfaces et des écritures de nombres (non identifiées en tant que telles). Tout comme chez Solène, même s'il y a plus de traces, il semble que les EC écrites ne soient pas la clé de voute du PI pour ce professeur. Les écrits de Gwen comme ceux de Solène sont contextualisés et sont des exemples sans discours associé écrit.

3.2 L'année (3)

Pour cette année, nous avons deux vidéos et les photocopies du cahier de cours ainsi que des écrits des élèves. Les élèves répondaient à la question « *Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?* ». Poser cette question était une recommandation institutionnelle (Au niveau académique). Solène la pose systématiquement et Sasha parfois. Tandis que les élèves de Solène répondent à l'oral, ceux de Gwen le font à l'écrit. Nous ne savons pas quelles sont les conditions de mise en œuvre de cette phase. Y a-t-il une discussion avant orientant les élèves pour écrire leurs textes ? Y a-t-il un débat ?

[112] *Nous avons recopié ce qui a été écrit…*

Nous avons la possibilité de décrire un peu plus finement le PI de Gwen en nous appuyant sur ses fiches de préparations (Annexe 27). Nous utiliserons la séance filmée d'introduction des fractions.

Nous trouvons trois temps d'EC écrites N_1, N_2, N_3. Les deux premières sont sur les fractions, la dernière sur les nombres décimaux.

Dans ces écrits, le statut de nombre de la fraction est affirmé. La fraction y est décrite comme composée de deux parties : un numérateur et un dénominateur. La fraction $\frac{4}{5}$ illustre la définition de ce qu'est une fraction. Gwen choisit comme exemple une fraction supérieure à 1.

Le dénominateur est défini comme le nombre de parts de l'unité. Des exemples d'unités sont donnés : un schéma d'une bande partagée en 5 parts égales et l'évocation d'un camembert comme possible unité.

La deuxième partie de la leçon expose des exemples isolés en indiquant comment ils se lisent. La règle de lecture de ces fractions n'est pas généralisée.

N2 Les fractions

1)Lire et écrire des fractions.

• Une fraction est un nombre. Elle est composée de deux parties :

le numérateur → 4 ← le nombre de parts utilisées

le dénominateur → 5 ← le nombre de parts de l'unité

Mon unité (camembert, bande…) est divisée en 5 parts, j'en prends 4.

• $\frac{1}{2}$ se lit : un demi $\frac{3}{2}$ se lit : trois demis $\frac{1}{3}$ se lit : un tiers $\frac{5}{3}$ se lit : cinq tiers

$\frac{1}{4}$ se lit : un quart $\frac{3}{4}$ se lit : trois quarts $\frac{7}{10}$ se lit : sept dixièmes $\frac{9}{5}$ se lit : neuf cinquièmes

La troisième partie de l'EC est une liste de règles générales qui permettent de comparer la fraction à l'unité. Chacune des trois règles est illustrée par un exemple.

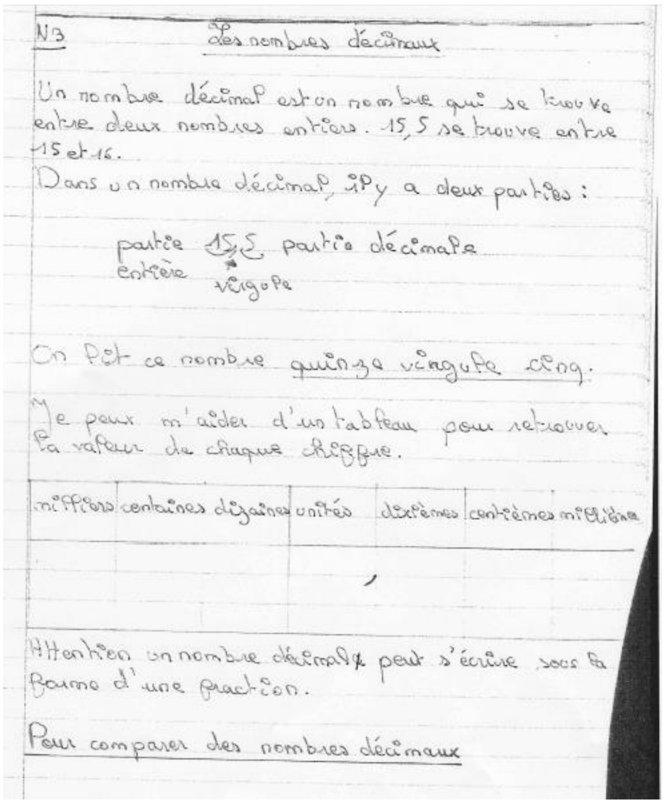
N2 2) Dire si une fraction est supérieure, inférieure, ou égale à 1.

• Une fraction est **supérieure** à 1 quand le numérateur est plus grand que le dénominateur. ($\frac{7}{3} > 1$)

• Une fraction est **inférieure** à 1 quand le numérateur est plus petit que le dénominateur. ($\frac{2}{15} < 1$)

• Une fraction est **égale** à 1 quand le numérateur est égal au dénominateur. ($\frac{16}{16} = 1$)

La troisième leçon traite des décimaux sans évoquer ni construire les liens avec les fractions décimales. Nous notons les imprécisions de la définition : *« Un nombre décimal est un nombre qui se trouve entre deux entiers ».*


N3 Les nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre qui se trouve entre deux nombres entiers. 15,5 se trouve entre 15 et 16.

Dans un nombre décimal, il y a deux parties :

partie entière 15,5 partie décimale
virgule

On lit ce nombre quinze virgule cinq.

Je peux m'aider d'un tableau pour retrouver la valeur de chaque chiffre.

milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes

Attention un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction.

Pour comparer des nombres décimaux

Les EC de Gwen montrent de véritables intentions de définir et de généraliser. Elles sont décontextualisées (on ne sait rien des activités qui ont permis l'émergence des nouvelles connaissances) sûrement dépersonnalisées (il faudrait pour être sûr regarder de plus près les contextes et les activités de la classe). Nous retrouvons un tableau permettant d'après Gwen de retrouver la valeur des chiffres. Nous lisons *« attention un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction »* sans que le lien entre écriture décimale et fraction décimale soit explicitement réalisé. Nous ne comprenons pas le « *attention* ». À quoi correspond cette mise en garde ?

3.3 Conclusion.

Globalement les EC écrites de Gwen sont d'ordre méthodologique, assez décontextualisées. Nous avons noté des manques et des ajouts au regard des programmes. Il écrit 32 leçons l'année (1) et 21 l'année (2). Nous avons vu que cette « *diminution* » était le résultat de changements liés à la programmation mais sûrement aussi à la gestion de la classe. Il doit être moins coûteux pour le maître et plus lisible pour les élèves de faire écrire l'ensemble d'un texte en une seule fois. Nous avons montré les difficultés potentielles liées à la mémorisation de ces textes sans connaissance de l'histoire de la classe. Nous pensons, sans le prouver, que la mémorisation de tels textes, souvent intermédiaires, participe à la construction de la mémoire didactique de la classe.

Nous sommes de nouveau face aux difficultés méthodologiques premières : il nous semble impossible de décrire un processus sans avoir d'un côté le contenu réel des séances (l'ensemble) de la séquence sur une notion bien précise à associer à une étude globale du rôle des EC écrites dans ce PI. Ces EC sont-elles produites en début, en cours, en fin de processus ? Sont-elles des EC intermédiaires c'est-à-dire destinées à soutenir momentanément la mémoire ?

Cette dernière question sur les EC intermédiaires nous conduit à essayer de mieux en comprendre les enjeux. Sasha et ses situations-repères nous offraient la possibilité de constater les deux rôles de ces situations : un rôle de régulation et un rôle dans la mémorisation. À côté de ces EC intermédiaires se construisaient des EC plus générales et des EC de synthèse. Qu'en est-il des EC de Gwen ? Nous ne déterminons pas leurs fonctions.
L'étude des EC de Sasha et de Gwen montre qu'il y a un paradoxe certain, une tension entre contextualiser et généraliser. Plus un texte est contextualisé plus il semble difficile de généraliser. Il semble même nécessaire d'arriver à décontextualiser[113] pour arriver à généraliser. Plus un texte tente de généraliser, plus le contexte semble manquer pour en comprendre sa genèse.
Les EC que nous avons rencontrées jusqu'à présent s'inséraient dans un PI que nous avons pu décrire. Nous n'arrivons pas à comprendre le rôle des EC écrites de Gwen car nous n'avons pas la mémoire didactique de la classe. Nous sommes alors en position d'essayer de comprendre un texte dont nous ne connaissons ni l'origine ni la nécessité de sa création. Nous ne savons pas à quel problème ce texte répond si ce n'est qu'il existe car institutionnellement il doit exister.

4 Analyse de la séance d'introduction sur les fractions : classe de Gwen.

Cette première séance correspond à la première séance que nous avons filmée au tout début de notre étude. Bien que l'affect du chercheur ne soit pas censé apparaître nous nous permettons quelques lignes car il a été à l'origine du choix des PE à suivre.

Nous ne connaissions pas Gwen, il nous a été présenté par une conseillère pédagogique car nous cherchions des futurs PEMFs à observer. Nous nous assurions ainsi, nous semblait-il d'observer des collègues qui étaient dans une démarche de construction professionnelle.[114]

Extrêmement gentiment, Gwen a accepté d'être filmé suite à notre troisième rencontre. Nous étions au fond de la classe avec nos trois casquettes d'enseignante, formateure et d'apprentie-chercheure. La séance nous a surprise par la somme des maladresses dans les contenus.

[113] Le processus de décontextualisation peut aussi avoir lieu grâce à un jeu de changement de cadre, mais pour le cas des fractions, il ne semble pas réalisable.

[114] *Ce qui a bien été le cas.*

L'année (4), après nos expérimentations, nous avons voulu rester en contact afin de lui faire lire ce que nous écrivions ou pour qu'il puisse apporter des précisions sur son travail. Nous ne sommes pas arrivée à entretenir le lien avec Gwen.

Finalement cette séance a été la source des questionnements méthodologiques : il nous fallait trouver des enseignants suffisamment expérimentés pour que nos échanges ne soient pas hiérarchisés : c'est-à-dire le didacticien qui aurait un savoir savant théorique et l'enseignante des connaissances du terrain seulement. Sasha et Solène, dans une certaine mesure, ont su montrer comment leur expertise leur permettait de construire des dispositifs didactiques au service du PI. Face à Gwen, nous nous retrouvions plutôt dans une démarche de compagnonnage. Le formateur avait du mal à s'effacer face à l'apprenti chercheur. Nous savions que nous avions un pas de côté à réaliser.

La séance que nous allons décrire a été analysée plusieurs fois à plusieurs moments. La deuxième séance filmée (sur les mesures) que nous n'analyserons pas, ressemble dans ses déroulements à celle-là. Gwen enseignait depuis 5 ans dans la même école et dans le même niveau (CM2) ce qui lui a permis de stabiliser globalement sa pratique de classe. Les deux séances ont été filmées à 6 mois d'intervalle. Nous affirmons sans le prouver dans le corps du texte, que nous avons pu constater des stabilités d'ordre médiatif dans ces deux séances. C'est pourquoi il nous semble que cette séance peut correspondre à l'ordinaire des séances vécues par les élèves de Gwen.

4.1 Eléments d'analyse a priori de la séance d'introduction des fractions.

Ces élèves de CM2 proviennent de deux CM1 différents. Gwen exerce dans une école urbaine de Zep. Gwen ne sait pas exactement ce que les élèves ont fait l'année passée sur les fractions. La seule certitude qu'il a c'est que souvent « *Les élèves ont tout oublié* ». Les résultats aux évaluations nationales sont assez faibles et en dessous de la moyenne nationale et académique.[115]

Gwen reste très flou quant aux ressources utilisées. Dans ses fiches de préparation, il indique les numéros des exercices extraits d'un manuel. Nous avons donc retrouvé la trace de l'activité dans ce manuel. Gwen nous explique que ce problème correspond à ce que ses élèves peuvent comprendre car proche du vécu des élèves. Le manuel utilisé est rarement conseillé en formation.

4.1.1 Description et analyse des propositions du guide du maître.

Ensuite le guide du maître donne les objectifs du programme et du socle commun des connaissances.

[115] *Nous n'avons pas les chiffres, juste des notes prises lors de nos échanges dans lesquels Gwen expliquait cela sans avancer les résultats de l'école.*

http://www.education.gouv.fr/pid20946/evaluation-des-acquis-filtre-academie.html (consulté le 6/08/2015)

Socle commun

L'élève est capable de :

- Écrire, nommer, comparer et utiliser quelques fractions simples.

Compétences

- Nommer les fractions simples en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart.
- Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.

Puis le guide donne deux conseils pour cerner les difficultés liées à l'apprentissage des fractions ainsi que des règles de comparaison d'une fraction avec l'unité et une indication sur des EC.

Le premier conseil est de faire comprendre « *qu'une fraction représente une partie d'une unité et rappelle qu'il est important d'utiliser des supports variés.* » Le deuxième conseil est « *de montrer que les fractions peuvent exprimer des nombres plus petits ou plus grands que l'unité sans oublier d'insister sur le vocabulaire employé en faisant pratiquer de nombreux jeux de lecture de fractions.* »

Piste de recherche

Distribuer la FICHE 5 à chaque élève.

◆ Dans cette leçon, le plus important est de faire comprendre qu'une fraction représente une partie d'une unité. Il est important de multiplier les situations de partages (parts égales) sur des supports variés pour que les enfants assimilent bien la notion.

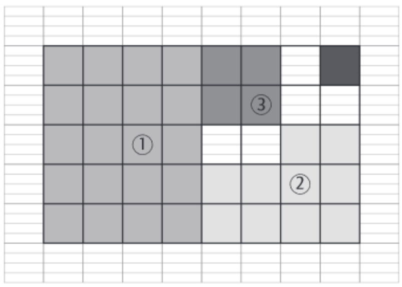
◆ On s'attachera à montrer tout particulièrement qu'une fraction peut exprimer aussi bien un nombre plus petit ou plus grand que l'unité sans oublier d'insister sur le vocabulaire employé en faisant pratiquer de nombreux jeux de lecture de fractions.

◆ En introduisant les termes de numérateur et de dénominateur, l'accent sera mis sur le fait que :
- si les deux sont identiques, on a une fraction égale à l'unité ;
- si le numérateur est inférieur au dénominateur, on a une fraction inférieure à l'unité ;
- si le numérateur est supérieur au dénominateur, on a une fraction supérieure à l'unité.

Suite à ces conseils, une activité sur fiche est proposée. Cette première activité correspond sûrement à l'objectif : utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs. C'est au lecteur de déduire les liens entre objectifs et activités.

L'activité 1 de cette ressource se présente sous la forme d'une surface rectangulaire de 8x6 carreaux dessinée sur du papier Sieyès. Certains carreaux sont grisés selon différentes nuances de gris. Pour chaque nuance de gris il s'agit de déterminer la fraction correspondante. L'unité (non donnée) est le carreau. Les fractions exprimées seront en quarantièmes. La question 3 de l'activité a sûrement pour ambition de travailler sur l'équivalence des écritures des fractions. Ainsi la question 3 doit permettre d'établir les équivalences suivantes : $\frac{1}{2}= \frac{20}{40}$ ou bien que $\frac{1}{4}= \frac{10}{40}$ et enfin que $\frac{1}{10}= \frac{4}{40}$

FICHE 5



a) Écris quelle fraction du carré est représentée par chaque partie grisée.

b) Écris la fraction représentée par les carreaux non grisés.

c) Pour les parties 1, 2 et 3, trouve une fraction plus simple.

Ces équivalences semblent peu triviales à établir surtout si, comme Gwen le précise, les élèves semblent avoir tout oublié. L'un des moyens d'y arriver est d'utiliser les connaissances potentielles sur le pavage d'aire et voir que la partie 1 correspond à la moitié de l'aire du rectangle. Ce changement de regard sur la figure induit un changement de cadre ce qui est loin d'être trivial sachant que l'unité de référence n'est pas indiquée. Cette activité illustre une des difficultés soulevées dans le chapitre 2 sur la « *pluralité* » de l'unité.

4.1.2 Analyse comparée de l'activité du manuel et de l'adaptation faite par le maître.

Gwen ne propose pas l'activité proposée ci-dessus mais nous ne connaissons pas les raisons de ses choix. Il adapte le problème suivant :

Enoncé du problème proposé par Gwen. Jean et Alexandre préparent un cocktail de jus de fruits pour leur anniversaire. Jus d'orange : 2L. Jus de pommes : $\frac{1}{2}$L Jus de citron : $\frac{1}{2}$ L. Jus d'ananas : 1L. Raisin : $\frac{1}{2}$ L Eau gazeuse : 3L. Sirop : $\frac{1}{2}$ L Pourront-ils servir ce cocktail dans un saladier de 10L ? Justifie ta réponse.	Dans l'ouvrage (pp 30-31 du guide du maître) [116]les données du problème étaient : Jus d'orange : 2L Jus de citron : $\frac{1}{2}$ L Jus d'ananas : $\frac{1}{2}$ L Eau gazeuse : $\frac{3}{2}$ L Grenadine : $\frac{1}{4}$ L Pourront-ils servir ce cocktail dans un saladier de 5L ? Justifie ta réponse.

Analyse de L'activité du manuel :
Le guide du maître, pour le problème du cocktail propose la correction suivante.

Jus d'orange : 2 L
Jus de citron + jus d'ananas $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1)$: 1 L
Eau gazeuse $(\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$: 1 L $\frac{1}{2}$
Grenadine : $\frac{1}{4}$ L
Le total est < 5 litres (4 L $\frac{3}{4}$).

La « *correction* » de l'activité dans le guide du maître permet de voir que l'un des objectifs (non annoncé par le manuel) est de décomposer en fractions simples ou d'additionner des fractions au même dénominateur. Nous ne faisons pas de lien entre les objectifs déclarés et cette activité de calcul avec des fractions.

Dans ces corrections du guide du maître nous notons les imprécisions de notation : l'unité (ici le litre (L)) est associée avec un nombre entier 1L $\frac{1}{2}$, 2L, 1L et disparait avec l'écriture

[116] *http://medias.hachette-livre.fr/media/contenuNumerique/Telechargement/12/382761438856979.PDF*

fractionnaire du nombre. L'unité L est parfois associée avec la fraction : $\frac{1}{4}$ L à condition que l'expression ne comporte pas de nombres entiers. Notons que dans la vie courante, il est possible d'entendre que l'on prend un litre et demi (sous-entendu un litre et un demi-litre) mais nous pensons que nos abus de langage dans la vie quotidienne ne doivent pas nécessairement être repris à l'école. Ce genre d'écriture entretient pour nous la confusion entre l'unité de mesure (L) et l'unité de référence. Il faut aussi comprendre que cette écriture signifie 1L+ $\frac{1}{2}$ L. La juxtaposition des écritures (absence du signe +) proposée par le manuel nous semble pouvoir induire de nombreuses incompréhensions.
Enfin la réponse : « *Le total est < 5 litres* $4L\frac{3}{4}$*)* » mélange langage naturel et symbole mathématique. Ce type de formulation est susceptible d'être repris par les professeurs qui suivent le guide du maître. Ces formulations hasardeuses induisent qu'il est possible d'utiliser des symboles mathématiques à tort et à travers. Il n'est pas non plus évident qu'il faille conduire à comparer $4+\frac{3}{4} < 5$. L'écriture ($4L\frac{3}{4}$) ne montre pas qu'il s'agit de l'écriture d'un nombre donc il ne peut pas être comparé à 5.

Analyse de l'activité adaptée de Gwen.

Gwen ajoute deux ingrédients : le jus de raisin et de pommes. Il utilise un mot générique pour désigner le sirop de grenadine et écrit juste « *sirop* ». Bien que nous n'en ayons pas la preuve, nous pensons qu'il a retiré le nom du sirop pour éviter d'expliquer ce qu'était la grenadine.
Il modifie les données du problème, il n'y a plus d'expression en quart de... Les élèves ont donc à additionner seulement des fractions au même dénominateur.
Plusieurs procédures sont possibles à condition de se souvenir que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.
Il y a quatre fractions identiques, il est donc possible de les additionner toutes les quatre et de faire apparaitre le résultat : c'est-à-dire 2 litres de jus mélangés. Il est aussi possible de les associer deux par deux et de calculer $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=1$ puis $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.
L'addition se résout ensuite seulement avec des nombres entiers, il reste à comparer le résultat (8L) au volume possible du récipient (10L). Les adaptations de Gwen sont liées
- aux connaissances du monde supposé par Gwen.
- aux connaissances supposées des élèves sur les fractions.

L'adaptation liée aux connaissances supposées des élèves conduit à réaliser l'activité a minima (Présence de fraction avec un seul dénominateur, comparaison de deux nombres entiers plutôt que d'un nombre entier et d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction.)

Conclusion : L'activité du manuel et son adaptation ne permettent pas a priori de construire le sens d'une fraction ni encore moins d'établir qu'une fraction « *est une partie de l'unité* ».
Gwen explique que cette activité correspond aux critères de De Vecchi (2007) et qu'elle correspond à une situation-problème dont nous recopions la définition :

> *« Pour nous, une situation-problème devrait :*
> - *<u>avoir du sens</u> (interpeller, concerner l'apprenant qui ne se contente pas d'obéir, d'exécuter)*
> - *être liée à un obstacle repéré, défini, considéré comme dépassable et dont les apprenants doivent prendre conscience à travers l'émergence de leurs conceptions (représentations mentales)*

- *faire naître un questionnement chez les élèves (qui ne répondent plus aux seules questions du maître)*
- *créer une ou des ruptures amenant à déconstruire le ou les modèles explicatifs initiaux s'ils sont inadaptés ou erronés*
- *correspondre à une situation complexe, si possible liée au réel, pouvant ouvrir sur différentes réponses acceptables et différentes stratégies utilisables*
- *déboucher sur un savoir d'ordre général (notion, concept, loi, règle, compétence, savoir-être, savoir-devenir…)*
- *faire l'objet d'un ou plusieurs moments de métacognition (analyse a posteriori de la manière dont les activités ont été vécues et du savoir qui a pu être intégré.)*

Une situation-problème ne peut être considérée comme telle que pour un niveau d'apprenants donné et si elle est exploitée par le maître ou le formateur comme une réelle situation de recherche. De ce fait, plus qu'un ensemble de critères rigides, c'est surtout la mise en œuvre d'un état d'esprit qui la définit. »

Les différents points énoncés ci-dessus peuvent correspondre à l'activité. Un critère comme « *avoir du sens* » et « *être lié au réel* » paraît assez subjectif sorti du contexte du texte des auteurs. Pour nous, cette activité n'a pas de sens car trouver un récipient de 10 L n'est pas aisé et nous doutons du goût du cocktail. Pour nous[117], cela n'a pas de sens en mathématique car nous n'avons pas pu établir les connaissances qui pouvaient être construites à l'issue de cette activité sur les fractions. Si les élèves ne savent pas que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, alors ils ne pourront pas faire l'activité et c'est là notre critère d'objectivité pour dire que nous émettons de sérieux doutes quant à la qualité de l'activité comme « *activité* » d'introduction des fractions.
Gwen fait donc confiance à sa ressource et à cet extrait qu'il a su nous reformuler[118]. Les critères donnés, en dehors de leur contexte semblent très généraux et s'appliquer à bon nombre d'activités. Appliqués ainsi ils donnent de la validité à l'activité.

4.2 Analyse des déroulements des deux activités réalisées dans la classe de Gwen :

4.2.1 Description du déroulement l'activité « cocktail » dans la classe de Gwen.

Nous pouvons déterminer plusieurs « *étapes* » de la séance filmée. Nous ne pouvons pas vraiment découper comme pour Solène ou Sasha en différentes phases car la séance filmée ne s'y prête pas. Globalement nous allons décrire une suite d'exercices.

Etape 1 : lecture de l'énoncé de l'activité.

[117] Nous nous posons aussi la question pour les élèves.

[118] Nous ne savons pas si Gwen a lu le livre, sur internet nous pouvons retrouver ces critères sur différents powerpoint ou pdf réalisés par des conseillers pédagogiques de circonscription.

Le problème est projeté sur le TBI et lu par les élèves. Une des élèves, Mélyna qui lit, se trompe à la lecture de $\frac{1}{2}$ L, elle lit un litre et demi. Gwen le fait remarquer :

ENS1 : Est-ce que vous êtes tous d'accord avec la lecture de Mélyna ?
Elève : Non.
ENS2 : Non ? Je t'écoute.
Elève : C'est jus d'orange 2L, jus de pommes : un demi-litre.
ENS3 : Ah ! Tu penses 1 demi-litre plutôt que 1 litre et demi ? Qui pense comme Mélyna ? Qui pense que c'est un demi-litre ? Tu peux me dire ce que c'est ce nombre justement en levant la main, c'est quoi ce nombre ?
Elève : (Inaudible.)
ENS4 : C'est une fraction. Vous en avez déjà vue en CM1 peut être ? Je vous laisse 2 ou 3 minutes pour résoudre le problème. La question c'est « *Pourront-ils servir ce cocktail dans un saladier de 10 L ? N'oubliez pas de justifier votre réponse*.» Faites comme d'habitude, 2 colonnes : recherche et solution… ou réponse, je préfère.

Gwen ne laisse pas les élèves répondre à la question : « *C'est une fraction. Vous en avez déjà vue en CM1 peut être ?* ». Cette question aurait pu être une amorce de phase de rappel ou encore l'occasion de mobiliser des connaissances sur la lecture des fractions. Ce n'est pas le choix de Gwen. Il les lance dans l'activité sans avoir apporté de réponse quant à la lecture de la fraction et sans poursuivre la lecture du problème. Il rappelle immédiatement les conseils de présentation «*Faites comme d'habitude, 2 colonnes : recherche et solution…ou réponse, je préfère* ». Il n'y a pas de réelle dévolution du problème, aucune discussion n'est engagée sur l'activité. Les élèves travaillent à deux dans le calme.
Etape 2 : phase de recherche sur ardoise.
Les élèves cherchent une réponse à ce problème. Un élève s'inquiète de savoir si la quantité de cocktail peut être ou non inférieure à 10.

Elève : Si le saladier n'est pas assez grand, ce n'est pas grave, ça rentre quand même !
ENS5 : Si tu trouves plus de 10 L ça ne rentre pas. 10 L pile poil, ça rentrera. Comment t'as-fait ? Marque-moi ça…
(Le maître circule.)
ENS6 : Je vous laisse encore 1 minute. Quand vous avez terminé, vous retournez votre ardoise.
Elève : (Inaudible.)
ENS7 : Alors, on passe ensemble. Je t'écoute Romain. Alors, dis-moi. Comment as-tu fait ?

L'enseignant ne répond pas à la question directement et renvoie le groupe d'élèves à son travail.
Lors de l'étape 3 certains groupes vont être amenés à présenter leur résultat.

Etape 3 : exposition des procédures

Les interactions entre le maître et les élèves sont incompréhensibles. Les intentions sont là : laisser les élèves exposer leurs résultats sans prendre parti, montrer la variété des procédures. Nous renvoyons le lecteur à la lecture de l'annexe (transcription 18)
L'extrait ci-dessous nous permet de voir qu'il n'y a pas de hiérarchisation des procédures ni de discussions autour des résultats. Le maître valide « *8L...d'accord* » puis « *Aujourd'hui la bonne méthode, c'est celle de Nicolas, en effet* $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. ».

Les élèves montrent qu'ils sont embarrassés avec la fraction$\frac{1}{2}$, certains la lisent comme (2-1), d'autres la transforment en $\frac{1}{2}$=11. Romain interprète l'écriture $\frac{1}{2}$= (2-1) en disant que c'est une division. L'enseignant reprend pour affirmer que « *oui c'est une division.* »

Nicolas : J'ai fait $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
ENS11 : Et puis après ?...
(L'enseignant écrit au tableau.)
ENS12 : Ce qui donne au total ?… 8L… d'accord.
Rappelle-moi Romain. Ta justification pour le ½… Tu as fait ½, c'est 2-1 et Léa, toi, tu as fait ½=11. Nicolas, ½+1/2 pour donner 1.
Qui peut me dire pourquoi c'est difficile d'obtenir 11 ?
Alexandre : Car ça, c'est multiplié par 6 ou par 5.
ENS13 : Oui, elle a du mal à utiliser cette fraction et elle l'a un peu transformée en 11. C'est un peu étonnant !
Et toi Romain, il a fait 2-1. Mais tu as dit une chose intéressante, tu m'as dit que ça te rappelait une division, tu te rappelles ?...
Romain :….
ENS14 : Oui, mais avant…Tu as dit que c'était une division. Tu verras par la suite, en fait une fraction c'est une division.
Aujourd'hui la bonne méthode, c'est celle de Nicolas, en effet ½+1/2=1.
Par exemple sur les bouteilles de coca-cola ou les bouteilles d'eau, souvent ce sont des bouteilles d'un litre et demi... et cela fait 2l et ½ litre et 1/2 litre donc 3L. La solution c'était 8 litres et 8 litres ça rentre dans un saladier de 10L.

Dans cet extrait il n'y a pas vraiment d'exposition de procédures mais plutôt des expositions d'interprétation de lecture. Les élèves essaient de se souvenir quelle opération est en jeu, tentent de réduire la fraction à une opération. Ils n'hésitent pas à en transformer l'écriture. La lecture de Nicolas est la bonne, Gwen l'affirme sans justification. D'ailleurs, est-il possible de justifier la lecture d'un nombre ? Cette séance illustre assez bien qu'il est parfois très hasardeux de laisser de trop grande marge de manœuvre aux élèves. Quel est le réel intérêt de laisser produire des écritures telles que celles-ci $\frac{1}{2}$= (2-1) par des élèves ?

La seule EC produite à ce stade est l'égalité $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

4.2.2 Analyse a priori de l'activité : des tirs au but.

L'activité que nous allons décrire rompt avec celles que nous avions rencontrées. Les grandeurs en jeu sont discrètes et l'aspect des fractions travaillé est la fraction-ratio.
L'activité est étiquetée comme « *situation de recherche* ». Nous n'avons jamais pu retrouver la source de ce problème, peut-être est-elle inventée par Gwen comme il l'avance selon les critères de De Vecchi.
L'énoncé du problème présente quatre élèves dont les prénoms sont empruntés à ceux de la classe qui effectuent plusieurs tirs au but (panier de baskets). Le nombre de tirs des joueurs est inégal : David en fait 10, Théo 20, Asma 5 et enfin Nicolas 4. Les informations sur le nombre de tirs et le nombre de tirs réussis sont données sous des habillages différents : une série de points coloriés en noir sur un ensemble de points, un score chiffré 12/20, une

phrase « *4 paniers réussis sur 5 lancés* » et enfin une représentation dessinée : 4 ballons représentés dont un est barré. Le problème consiste à trouver quel est le meilleur lanceur.
Pour réussir cette activité, il faut tout d'abord déterminer chaque fraction nombre de tirs réussis sur nombre total des tirs. Ensuite il faut comparer les quatre fractions exprimées avec des dénominateurs différents. Pour réussir cette comparaison les 4 fractions doivent avoir un dénominateur commun (Dans l'activité c'est 20). L'hypothèse implicite est que Asma, David et Nicolas gardent le même rapport même si on augmente leurs nombres de tirs. (voir l'exemple ci-dessous)
Pour faire cela sans avoir à réduire les fractions au même dénominateur, les élèves ont à remplir un tableau. La bande la plus longue correspond à l'ensemble des tirs. Pour chaque joueur la bande est partagée en 10, 20, 5 ou 4 parts égales. Il suffit alors de comparer les longueurs des bandes.

Situation de Recherche

Des élèves effectuent des lancers francs au panier du gymnase de l'école. Après coup, ils cherchent à savoir lequel a été le meilleur. Aide-les à trouver le classement.

David : ●●●●●●○○○○

Théo : 12 sur 20

Asma : 4 paniers réussis sur 5 lancés.

Nicolas

Résultats des joueurs

Classement :
1er → .... 2ème → ....
3ème → .... 4ème → ....

Les élèves ont donc à leur charge de trouver la fraction correspondante à chaque assertion, puis de reporter les résultats dans le tableau. Les élèves vont passer des fractions exprimées à partir de quantités (grandeurs discrètes) à des grandeurs continues. La méthode fonctionne si on part de l'hypothèse que les joueurs ont conservé les mêmes rapports tirs réussis/totalité des tirs.

Les potentialités d'EC que nous voyons sont liées aux équivalences des fractions et à la comparaison. Il est possible d'établir que $\frac{6}{10}=\frac{12}{20}$ puis d'écrire que $\frac{6}{10}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$ sans pour autant établir une règle (mis à part qu'on peut ordonner les fractions comme les entiers).

4.2.3 Description du déroulement de l'activité « Tir au but » en classe.

Lors de la mise en commun, Gwen interroge en premier les élèves qui se sont trompés. Ainsi Assya a écrit $\frac{6}{4}$ au lieu de $\frac{6}{10}$. L'écriture qu'elle propose établit le rapport entre nombre de buts réussis sur nombre de buts manqués. Gwen arrête Assya car elle évoque le nombre du haut et le nombre du bas. Il réagit au vocabulaire mais pas réellement aux difficultés d'Assya qui n'a pas établi le bon rapport. En cela, Gwen est cohérent avec le deuxième conseil du guide du maître.

Assya : 6/4.
ENS18 : Je t'écoute. Comment as-tu fait ?
Assya : J'ai regardé. Là, il y a 6 points noirs donc six là- haut, j'ai mis un trait.
ENS19 : Est-ce que « là-haut » on peut le remplacer ? Allez ! cherchez ! dans votre mémoire.
Elève : Dénominateur.
ENS20 : Le chiffre en haut… Allez, vous n'êtes pas loin, c'est le numérateur. Assya nous a dit que le numérateur c'est les 6 points noirs et le dénominateur les 4 points blancs. Qu'as-tu fait toi ?
Elève : Moi, j'ai mis 6 sur 10.
ENS21 : Et comment as-tu fait pour trouver 6/10 ? Et ça se lit comment ?
Elève : Six dixièmes. J'ai regardé les 6 points noirs et que j'ai pris tous les points blancs et tous les points noirs.
ENS22 : D'accord, tous les points. Qui a trouvé comme Assya 6 quarts ? Ah, donc deux groupes. Bon, la bonne réponse c'est 6/10. Ecoutez bien, le numérateur est le chiffre noté en noir sur le nombre total de paniers

Gwen dit clairement que c'est 6/10 la bonne réponse, seuls 4 élèves se sont trompés donc il passe rapidement à la correction de la suite de l'exercice. Il reprend les élèves par rapport au vocabulaire utilisé :

Maxence : Douze sur 20.
ENS23 : On dit comment ?
Maxence : Douze vingtièmes.

Notons que dire douze sur vingt pour la lecture d'une fraction-ratio est juste.
Puis Gwen lance la suite de l'activité :

ENS26 : Ecoutez bien… Vous avez trouvé ces 4 fractions et vous allez les représenter sur le petit tableau, là, en dessous. Ici, il y a 10 cases correspondant aux 10 points, en dessous, 20 cases correspondant aux 20 points, 5 cases correspondant aux 5 points et 4 cases correspondant au quart.
Vous allez devoir colorier pour obtenir les fractions situées là-bas, à chaque fois, ici.
Gwen présente le tableau comme une autre manière de représenter les fractions, l'activité des élèves consiste à identifier quelle bande correspond à quel joueur et à colorier en fonction du codage. L'activité mathématique s'exerce vraiment a-minima.

Les élèves colorient assez rapidement leur tableau. Gwen passe dans les rangs ne propose pas vraiment de mise en commun et conclut :
ENS29 : Donc c'est Asma qui est arrivée la première au classement. Le deuxième c'est Nicolas, qui arrive 3ème ? Le 3ème, David et Théo à égalité. 6/10, c'est comme 12/20, on est à égalité.
Gwen poursuit en essayant de justifier pourquoi le tableau proposé permet d'avoir une réponse acceptable. Pour justifier, il introduit une règle permettant de mettre des fractions au même dénominateur. La règle est formulée en parlant du nombre du haut et du bas.

On peut ainsi tout mettre sur 20. 10 pour aller à 20, on multiplie par 2. On multiplie alors le haut et le bas par 2.

$$\frac{6x2}{10x2} = \frac{12}{20}$$

5 pour aller à 20. Faut multiplier par 4 en haut et en bas.

$$\frac{4x4}{4x5} = \frac{16}{20}$$

C'est pour ça que c'est plus haut.
3x5/4x5=15/20.

$$\frac{3x5}{4x5} = \frac{15}{20}$$

Vous écrivez le classement : c'est Asma, Nicolas, David et Théo.

<u>Etape 5 et 6 : vers le moment d'exposition des connaissances et la lecture de la leçon.</u>

La réponse de l'activité est donnée. Gwen, alors, demande à des élèves de lire des fractions.

ENS34 : Quand au dénominateur, c'est un 5, Tiggy ?
Elève : Cinquièmes.
ENS35 : Un 6 ?
Elève : Sixièmes.
ENS36 : Un dix ?
Elève : Dixièmes.
ENS37 : Un 20 ?
Elève : Vingtièmes.
ENS38 : 102 ?
Elève : Cent deuxièmes.
ENS39 : Le chiffre du haut de la fraction s'appelle le ?...
Il poursuit en demandant comment s'appelle le nombre du haut et du bas.
ENS43 : Pourquoi le numérateur c'est 6 ? C'est parce que j'ai compté le nombre de....
Elève : (Inaudible.)… Euh, le nombre de points.
ENS44 : Le nombre de points coloriés.
Elève : Et pour le dénominateur, je compte le nombre total des points.

Gwen définit la fraction comme un rapport entre des objets coloriés sur une totalité d'objets. La leçon est lue puis il distribue des exercices pour lesquels il faudra appliquer la

règle donnée ci-dessous « *dénominateurs c'est un nombre total de…* ». Nous renvoyons en annexe 27 les exercices proposés. Ces exercices (7 énoncés différents) correspondent au premier conseil du guide du maître : « *Il est important de multiplier les situations de partages (parts égales) sur des supports variés pour que les enfants assimilent bien la notion.* », mais aussi aux objectifs annoncés.
Lors de cette séance, les EC sont liées au vocabulaire : présentation du numérateur (nombre du haut) et du dénominateur (nombre du bas), de la lecture des fractions et d'une règle permettant de mettre au même dénominateur plusieurs fractions. La lecture d'EC écrites ajoute un lien entre fraction et unité.

4.3 Analyse a posteriori des deux activités et conclusion.

Nous avons mis en évidence lors de l'étude des pratiques de Sasha et Solène les difficultés liées à la volonté de rester proches des élèves tant du côté discursif que du côté cognitif. La présence de ces proximités avait pour effet d'accompagner les élèves, de réguler à chaud. La pratique de Gwen ne nous offre pas la possibilité d'observer de telles proximités.

Les proximités établies sont plutôt d'ordre de la gestion : Gwen a une attitude bienveillante, écoute ses élèves, écarte de manière très neutre les réponses singulières de ses élèves. La paix sociale est garantie. Les élèves exécutent les tâches données pour autant il n'y a pas de prémices visibles concernant la construction personnelle des connaissances. Les élèves peuvent se tromper, faire des essais sur une activité peu robuste ou inadaptée. L'enseignant quoi qu'il arrive donne la réponse sans s'appuyer réellement sur le travail des élèves. L'étude des sommaires et des EC du cahier de leçons, nous permet d'avancer que les connaissances mathématiques de Gwen semblent automatisées, naturalisées, pas nécessairement questionnées. Gwen écoute peu ses élèves, semble faire confiance en sa ressource et à quelques résultats de la didactique qu'il a adaptés.
Globalement les déroulements sont cohérents avec les préconisations institutionnelles : les élèves sont mis en recherche, l'enseignant prévoit des mises en commun, écarte les procédures erronées. Gwen utilise le mot « *institutionnalisation* » pour décrire les moments de distribution et de lecture du texte des EC écrites et institutionnalise à son sens (distribue une trace écrite destinée à être apprise à la maison ou à l'étude dirigée[119]).
Pour autant, l'exercice de la vigilance didactique semble assez faible : le choix des situations ne permet pas de faire fonctionner des connaissances mathématiques. Les activités sont proposées a-minima. Les EC écrites sont en accord avec les prescriptions du manuel mais sans rapport avec les activités Cocktail et Tir aux buts.
La distance entre les activités et les EC produites est trop grande pour qu'on puisse garantir l'établissement d'un lien entre l'activité mathématique et les expositions de connaissances. Certaines EC sont les mêmes que celles établies par Sasha (comparaison d'une fraction à l'unité) mais les conditions de leur production, leur genèse sont si différentes qu'elles n'apportent pas la même compréhension des objets étudiés.

[119] *Gwen est responsable des études dirigées qui sont des temps de travail payante pour lesquels il est rémunéré. Notre expérience de conseillère nous permet de dire que la présence de ces études dirigées pousse les enseignants à donner des devoirs.*

Pour Sasha et Solène nous avions déduit que les PI existaient sous des formes différentes. Leur PI cherchait à trouver un équilibre, à gérer les deux dimensions sociales et cognitives du PI.
Bien que nous ne puissions pas vraiment décrire finement le PI de Gwen, il ne nous semble pas répondre aux mêmes systèmes de contraintes. Enseigner en Zep est une contrainte telle qu'il n'est pas aisé de laisser trop longtemps les élèves face à des incertitudes. Pour autant le PI n'est pas vraiment enclenché dans la pratique de Gwen. Les intentions sont présentes (comme l'attestent les fiches de préparation dans lesquelles figurent plusieurs temps d'institutionnalisation) mais la réalité est autre.
Butlen et al définissent 5 niveaux pour caractériser les pratiques des PE. Gwen[120] n'a pas atteint le niveau qui consiste à trouver des situations robustes, cela semble avoir un impact très corrélé sur les autres niveaux. Les activités présentées montrent qu'elles contraignent Gwen à produire des règles en dehors des programmes et sûrement de la ZPD des élèves.
Les autres niveaux sont présents mais jamais aboutis. Les pratiques de Gwen ne relèvent pas du i-genre 3. Nous n'avons pas assez de séances filmées pour trancher et déterminer si ses pratiques relèvent du i-genre 1 ou 2.

4.4 Description et analyse du PI dans la classe de Julien.

4.4.1 Précisions sur les conditions d'exercice de Julien.

Julien exerce dans une grande ville de la banlieue parisienne assez favorisée. Il exerce à mi-temps dans une classe de CM1 et à mi-temps dans une classe de CM2 dans une autre école. Nous avons obtenu les autorisations de filmer seulement pour la classe de CM1. Julien n'est pas complétement libre du choix des manuels et des cahiers dans la classe de CM2. Dans la classe de CM1, il a pu choisir. Les difficultés pour obtenir les autorisations liées aux contraintes de Julien nous ont conduite à recueillir des données seulement dans la classe de CM1. Les domaines en mathématiques et en français sont répartis entre les deux enseignants de la classe. Julien a en charge les domaines de numération et calcul et une partie d'organisation et gestion de données. La collègue a en charge la géométrie et ce qui relève des grandeurs et mesure. Les ressources qu'il utilise sont Euro Maths, Cap Math, ERMEL, parfois « *A portée de maths* ». Ces EC écrites sont empruntées à différentes ressources en ligne.

4.4.2 Présentation et reconstitution du sommaire du cahier de leçons.

Tout comme pour les trois autres enseignantes de notre étude, le cahier est un grand cahier 21x29,7. L'organisation du cahier est la même que celui de Gwen. Le cahier est séparé en deux : la première partie est consacrée aux leçons de français, la deuxième partie aux leçons de mathématiques. Le cahier s'appelle : cahier de référence. Les textes sont collés les uns à la suite des autres.

Sommaire du cahier de référence de Julien, année 2013-2014.
1. N1 : Nombres entiers naturels
2. N2 : Nombres entiers naturels (2)

[120] *Nous mettons en annexe (transcription18) l'énoncé donné lors de la deuxième séance filmée. Nous retrouvons un problème de cocktail.*

3. N3 : les nombres de 0 à 999999
4. Ca1 : l'addition des nombres entiers
5. Ca2 : les tables d'addition
6. Ca3 : Poser et calculer une soustraction
7. Ca4 : mes tables de soustractions
8. Ca5 : double moitié, triple, tiers, quart, quadruple
9. Ca6 : les tables de multiplication
10. Ca7 : la multiplication
11. N4 : les fractions
12. Ca8 : Technique de la division à un chiffre
13. N5 : les fractions (2)
14. N6 : placer les fractions sur une ligne graduée
15. N7 : Simplifier les fractions
16. N8 : Pour comparer une fraction avec l'unité
17. N9 : Trouver la partie entière d'une fraction
18. Ca9 : les tables de multiplication de 10, 11, 12.
19. N10 : pour décomposer une fraction décimale tu peux utiliser les relations entre millièmes, centièmes, dixièmes et unités.
20. C9 : technique de la division à deux chiffres
21. N11 : les fractions décimales.
22. C10 : addition et soustraction des nombres décimaux
23. C11 : Diviser un nombre entier par 10,100,1000.
24. C12 : la multiplication d'un nombre décimal
25. N12 : les nombres décimaux
26. N13 : les nombres décimaux
27. C13 : Technique de la division décimale d'un nombre entier par un nombre entier
28. N14 : Intercaler des nombres décimaux
29. Organisation et gestion de données : la règle de trois.

Le nombre d'EC écrites sur l'année est équivalent au nombre d'EC écrites par Sasha pour ces domaines-là. Il y a autant de leçons en calcul qu'en numération. Nous relevons 11 EC des fractions aux nombres décimaux dont 6 qui traitent seulement des fractions (5 sur les fractions et 1 sur les fractions décimales). Ce nombre d'EC écrites montre que pour Julien, à ce moment de sa construction professionnelle elles sont incontournables. Les EC écrites font souvent une page entière du cahier ou les deux tiers. Les titres des leçons annoncent le savoir en jeu d'une manière très générale : les nombres décimaux, la multiplication. Parfois ils annoncent une technique : technique de la division décimale d'un nombre entier par un nombre entier ou un type de tâche : simplifier les fractions, intercaler des nombres décimaux. Des EC sont écrites dans des polices de caractères différentes, les titres sont parfois soulignés ou pas, des éléments sont parfois en caractère gras ou pas, Les EC sont parfois encadrées, d'autres fois il est spécifié : « *vocabulaire à connaitre* ». Cette variabilité dans la forme ne nous permet pas de dégager une règle comme « *ce qui est écrit en rouge doit être appris par cœur.* »
Les EC produites par Gwen et Solène sont assez peu nombreuses, nous sommes alors moins sensible à la forme. Le recueil de Sasha est très organisé tant dans la forme que dans le fond ce qui en facilite la lecture. Le recueil de Julien en nombre de leçons est aussi important mais

son manque d'homogénéité nous interroge. Nous avons cherché à en comprendre les « *raisons* ». Julien exprime la difficulté de produire des EC écrites, il nous confie « *je cherche un peu partout sur le net, je pioche à droite et à gauche et je donne ce que je trouve d'intéressant et correspond à ce que je fais en classe*»[121]. Lors de nos échanges, nous lui demandons comment il explique le fait que ces EC écrites en Français sont encore plus nombreuses et paraissent plus homogènes dans leur forme : même police de caractères, même présentation. Il nous explique qu'il ne se fait pas confiance en français et suit alors le manuel et les aides associées sans s'en écarter. Comme il se fait plus confiance en mathématiques il compte sur son jugement pour effectuer un choix plus « *éclairé* » sans pour autant arriver à produire un texte de savoir à destination des élèves. Lors d'un de nos échanges par mail où nous lui avions demandé ce qu'était pour lui une institutionnalisation, Julien nous livre cette définition : « *La phase d'institutionnalisation est un processus de transformations d'une connaissance construite par les élèves en un savoir validé par l'enseignant. Cette institutionnalisation peut avoir différentes formes : écrite (affichage, leçon sur cahier, schéma...) ou orale.* ». Il nous assure ainsi qu'il en connaît la définition et les différentes formes possibles des EC, en revanche il ne nous dit pas ce qu'il a vraiment retenu et compris de cette définition ni ses difficultés.

4.4.3 Etude de l'itinéraire cognitif proposé dans la classe de Julien.

Julien, lors de la préparation de sa séquence sur l'enseignement des fractions, nous a parfois sollicitée. Il nous a demandé quelles ressources utiliser. Julien nous a envoyé plusieurs brouillons de ses fiches de préparation. Ses interrogations étaient plutôt centrées sur le format de sa fiche, les modalités de gestion. Il lui a été parfois difficile de faire des choix car les conseillères pédagogiques qui le suivaient dans le cadre de la préparation de son examen tenaient à ce que sa séquence propose des mathématiques concrètes : propos rapportés par Julien comme « *introduire les fractions à partir de partage des pizzas* ». Toujours d'après Julien, les conseillères pédagogiques n'auraient jamais vu d'introduction des fractions dans un contexte de mesure et elles lui déconseillaient fortement de proposer de telles situations jugées trop audacieuses pour l'examen. Nous ne voulions pas désorienter plus Julien et nous voulions le laisser faire ses choix. Nous lui avons proposé notre aide pour la relecture de ses fiches et nous l'avons laissé gérer l'ensemble de ses contraintes. Julien a donc décidé de proposer une séance de partage des pizzas, une séance de partage d'une tablette de chocolat et d'une troisième séance de partage du terrain de basket pour faire des espaces de jeu équitable lors d'une séance en EPS. Pour lui ses séances lui permettaient de voir ce que les élèves comprenaient ou pas. Julien n'avait jamais enseigné les fractions auparavant. Ces séances n'apparaissent pas dans sa fiche de séquence. Julien ne voulait pas prendre le risque de présenter au Jury une séquence de 10 leçons qui aurait pu paraitre trop longue.

Tout comme Sasha ou Solène, nous relevons à quel point il est difficile sur un thème donné pour un professeur d'établir le juste « *nombre* » de séances. C'est une préoccupation très forte. Enfin, nous avons un peu plus mesuré à quel point il est difficile, pour un PE, de faire des choix sur le contenu d'un enseignement tellement les ressources et les conseils en formation sont variés.

[121] *11 Juillet 2015*

Julien prévoit donc 7 séances (dont l'évaluation) déclarées dans la fiche de séquence. La source principale est ERMEL CM1. Ces 7 séances ne prennent pas en compte l'étude des fractions décimales.
Sa fiche de séquence se présente sous la forme d'un tableau format paysage divisé en 4 colonnes qui distinguent : la place de la séance dans la séquence, les objectifs, des éléments de contenu pédagogique et enfin des critères de réussite (du côté des élèves) (annexe 21). Julien, contrairement à la fiche de préparation de Gwen n'évoque pas d' « *institutionnalisations* ». Julien ne mentionne pas les papiers qu'il fait coller dans les cahiers. Il nous est parfois difficile de faire le lien entre l'EC écrite et les séances déclarées dans les fiches de préparation.

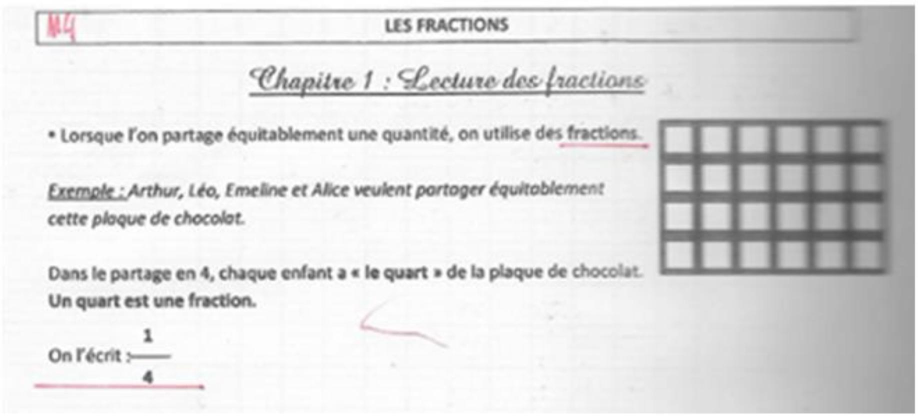
4.5 Etudes des EC écrites dans la classe de Julien.

Nous avons relevé 11 EC écrites des fractions aux nombres décimaux. Les six premières EC traitent des fractions, 2 EC (N_{10} et N_{11}) traitent des fractions décimales et enfin 3 EC (N_{12}, N_{13}, N_{14}) traitent des nombres décimaux.

4.5.1 Description et analyse de N_4 : les fractions(1).

Sous le premier titre, nous pouvons lire un sous-titre : *« chapitre 1 : Lecture des fractions »*. Dans cette leçon, nous distinguons deux parties. L'une qui définit la fraction comme un outil pour réaliser des partages équitables *« Lorsque l'on partage équitablement une quantité, on utilise des fractions »* mais aussi comme le résultat du partage : *« Dans le partage en 4, chaque enfant a « le quart » de la plaque de chocolat. Un quart est une fraction. Elle s'écrit* $\frac{1}{4}$ *».* La deuxième partie donne une règle de lecture des fractions *« Pour lire les fractions, il faut utiliser le suffixe ième sauf pour demis, tiers et quarts »* suivie d'exemples.

Extrait de la leçon :


N4 LES FRACTIONS

Chapitre 1 : Lecture des fractions

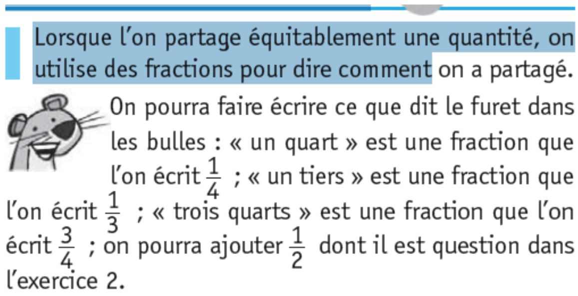
• Lorsque l'on partage équitablement une quantité, on utilise des fractions.

Exemple : Arthur, Léo, Emeline et Alice veulent partager équitablement cette plaque de chocolat.

Dans le partage en 4, chaque enfant a « le quart » de la plaque de chocolat.
Un quart est une fraction.

On l'écrit : $\frac{1}{4}$

Cette EC est produite suite à une activité que nous appelons « les plaquettes de chocolat » dans Euro Maths CM1 (p165 du guide du maître). Nous retrouvons dans le guide du maître des indications pour la conclusion (qui ne sont pas appelées « *institutionnalisation* »). Julien suit en partie les indications en les adaptant. Son adaptation « *lorsqu'on partage équitablement on utilise des fractions* » consiste à retirer la portion de phrase : « *on utilise* *les fractions* ***pour dire comment on a partagé*** ». L'adaptation ainsi proposée n'est pas aussi exacte que celle de la ressource.



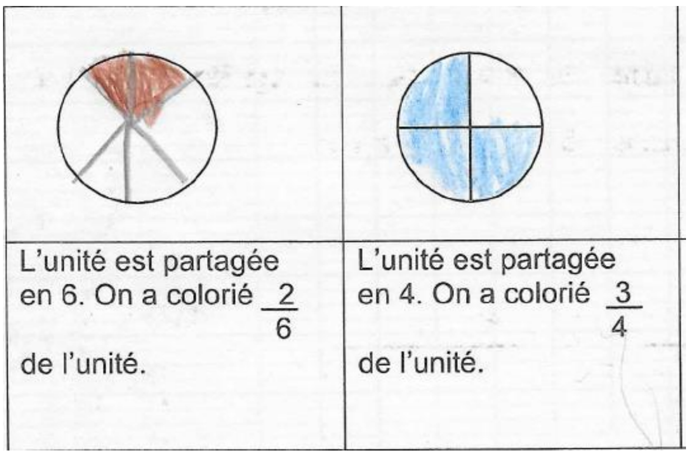
Lorsque l'on partage équitablement une quantité, on utilise des fractions pour dire comment on a partagé.

On pourra faire écrire ce que dit le furet dans les bulles : « un quart » est une fraction que l'on écrit $\frac{1}{4}$; « un tiers » est une fraction que l'on écrit $\frac{1}{3}$; « trois quarts » est une fraction que l'on écrit $\frac{3}{4}$; on pourra ajouter $\frac{1}{2}$ dont il est question dans l'exercice 2.

Les EC écrites proposées sont assez générales illustrées par des exemples. Cet écrit montre des fractions, donne des indications pour les lire. Le contenu proposé est ici un écrit intermédiaire décontextualisé avec des propositions de généralisation. Les exemples (fraction simple de l'unité) sont génériques. Le nombre de leçons permet de penser qu'un contenu plus robuste sera présent dans les autres EC.

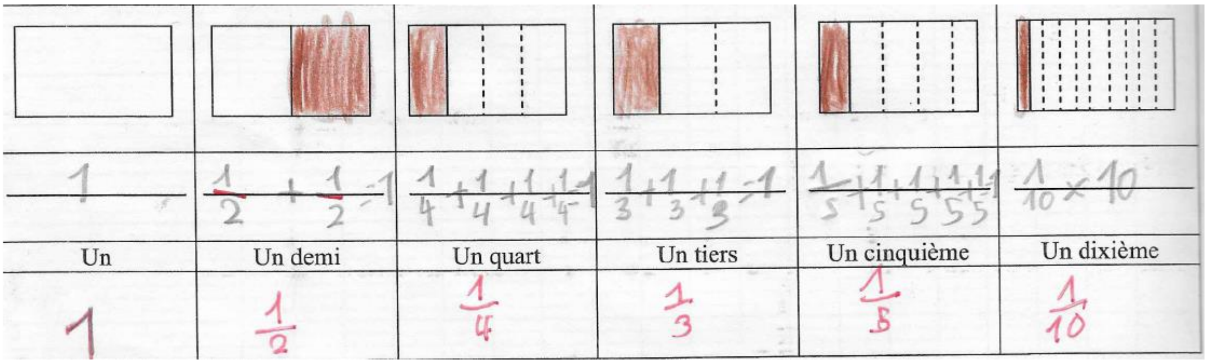
4.5.2 Description et analyse de N_5 : les fractions(2).

Les fractions(2) sont construites selon deux parties. **La première** montre deux représentations possibles des fractions (des disques et des surfaces rectangulaires). Dans ces exemples l'unité est une fois le disque une fois l'aire de la surface rectangulaire. Julien désigne l'unité en la dessinant sans écrire explicitement que l'unité c'est le disque.



Ou Julien ne fait pas apparaitre une écriture pour l'unité mais la nomme « *un* », et en propose plusieurs décompositions.

Julien propose également une définition à connaitre par cœur du numérateur et du dénominateur : « *Le numérateur indique le nombre de parts considéré et le dénominateur indique en combien de parts on a divisé l'unité.* »



La deuxième partie de cette EC consiste à proposer une suite de règles qui d'une part permet de comparer les fractions à l'unité et d'autre part d'ordonner les fractions selon leur dénominateur ou leur numérateur. Une des règles énoncée, à propos de l'ordre des fractions est fausse (effet d'une confusion). Nous lisons :

[122] « *Pour ranger les fractions dans un ordre croissant ou décroissant, il te suffit de comparer :*

*-les dénominateurs (**<u>si les dénominateurs sont différents</u>**)*[123] *: la plus grande fraction est celle qui a le plus petit dénominateur.*

Exemple : $\frac{5}{3} > \frac{5}{4}$

-si les numérateurs (si les dénominateurs sont égaux) : plus le numérateur est grand plus la fraction est grande.

Exemple : $\frac{2}{4} < \frac{6}{4}$ »

Cette leçon prend en compte sans que ce soit complétement explicite l'importance d'identifier les unités et en présente deux unités différentes. Les EC montrent plusieurs décompositions de l'unité au regard de leur représentation. Enfin les EC de la dernière partie proposent des EC générales, décontextualisées et dépersonnalisées.

Contrairement aux leçons proposées par Gwen, nous sommes capables de reconstituer un itinéraire cognitif potentiel (confirmé par la lecture des fiches de préparation). Les fractions sont introduites dans un premier contexte de partage (grandeurs semi discrètes) : du partage des tablettes de chocolat à des partages d'aires de surfaces différentes.

Les fiches de préparation nous apprennent (Annexe 21) que l'une des premières séances consiste à reprendre une activité du ERMEL CM1. Il s'agit d'arriver à donner la mesure d'un segment à partir d'une unité donnée. Les fractions pour Julien sont bien introduites dans un contexte de mesure de longueur. Cette leçon propose d'autres représentations possibles.

Enfin, notons que nous ne trouvons pas de traces des activités de la classe dans le cahier. Sasha fait exception dans notre étude. Pour autant, un lien est fait entre activité de classe et exposition de connaissance par le biais de l'affichage collectif. Ainsi dans la fiche de préparation nous lisons :

[122] *Nous avons recopié le texte.*

[123] *Il faut remplacer ce qui est souligné par : si les numérateurs sont égaux alors la plus grande fraction est celle qui a le plus petit dénominateur.*

5' Collectif **Oral**	Affiche	9/ **Institutionnalisation** A l'issue de cette activité, on conservera une trace écrite sous forme d'un affichage collectif. 1 unité 1/2 | 1/2 1= ½ + ½ 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 1=1/4+1/4+1/4+1/4 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 1= 1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8 **Dans une unité, il y a 2 demis, il y a 4 quarts, il y a 8 huitièmes.** **Dans un demi, il y a 2 quarts, il y a 4 huitièmes.** **Dans un quart, il y a 2 huitièmes.**	• Demander aux élèves d'expliquer l'affichage en utilisant les mots : moitié, quart, huitième et unité. • Ajouter à l'oral : ➔ *Quand vous pliez et partagez en deux segments superposables, vous réalisez des moitiés de la bande unité ou deux moitiés ou deux demies de la bande unité.* *Quand vous pliez et partagez en 8 moitiés superposables vous réalisez des huitièmes.* ⇨ Cette phase institutionnelle va permettre aux élèves d'ancrer les connaissances essentielles qui pourront être réinvesties dans la prochaine séance.	• Mobiliser les connaissances des élèves et les réinvestir. • Comprendre que l'unité peut s'exprimer comme une somme de fractions inférieur à 1 : 1=1/2+1/2 1=1/4+1/4+1/4+1/4 1=1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8

Cet affichage collectif que nous avons rencontré aussi dans la classe de Solène permet d'établir visuellement des équivalences entre les différentes écritures et de rendre compte des différentes sommes de fractions possibles égalent à 1.
La leçon N_4 doit se situer après les deux premières séances. Nous pensons que N_5 se situe juste après cette séance. Ni la fiche de séquence ni le contenu des EC écrites ne nous permettent de faire les liens entre les objectifs annoncés des séances et les EC.

4.5.3 Description et analyse de N6 : chapitre 3 « placer les fractions sur une ligne graduée ».

Cette EC montre comment placer une fraction sur une droite graduée en s'appuyant sur une règle généralisée et sur des exemples : *« pour placer des fractions sur une ligne graduée, il faut utiliser des sous-repères, régulièrement espacés. Pour placer* $\frac{9}{4}$*, on partage chaque intervalle entre deux nombres entiers en quatre parties égales : on obtient une ligne graduée en quart ».* Le dernier exemple introduit implicitement les fractions décimales : *« Pour placer* $\frac{63}{10}$*, on peut écrire* $\frac{63}{10}$*, =6+*$\frac{3}{10}$*, ce qui permet de placer* $\frac{63}{10}$*, en face du repère situé trois dixièmes après le repère marqué 6. ».* Aucune justification n'est donnée pour expliquer cette égalité : *63/10=6+3/10.* Il y a une confusion entre repère et graduations.

Nous n'établissons aucun lien entre cette EC est la séquence donnée par Julien. Nous lui avons demandé combien de séquences il avait réalisé sur les fractions. Il y a donc la première séquence de 10 séances réelles suivies d'une autre séquence sur « *écrire une fraction sous forme d'une somme d'un entier et d'une fraction de l'unité* » et d'une troisième séquence sur les fractions décimales et les nombres décimaux. Nous n'avons pas de trace de ces séquences puisque Julien a cessé de faire des fiches de séquence après le passage de l'examen : « *J'ai vraiment trop de travail entre le mémoire, la suite de l'examen et les deux classes à gérer, ça tourne dans la classe alors j'en ai moins besoin.* ».

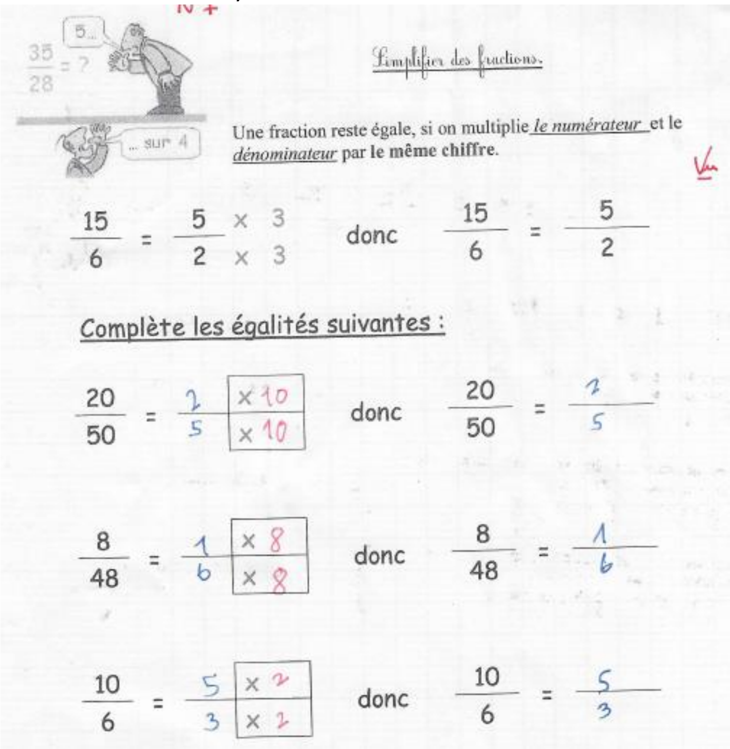
4.5.4 Description et analyse de N_7 : Simplifier les fractions

Cette EC donne une technique pour simplifier les fractions. La technique repose sur la règle suivante : « *une fraction reste égale si on multiplie le numérateur et le dénominateur par le même chiffre* [124]» et présentée sans aucune autre justification. Simplifier une fraction est

[124] *Le même nombre aurait été plus judicieux.*

réduit à trouver des multiples communs au numérateur et au dénominateur et à faire « *disparaitre* » ce multiple commun. Nous avons demandé à Julien les raisons de la production de cette EC écrite. Il nous explique qu'il ne voit pas du tout comment atteindre l'objectif « *écrire une fraction sous la forme d'un entier et d'une fraction de l'unité* ». Il comprend que c'est possible à partir de cette règle sans pour autant trouver des moyens matériels ou une ressource lui montrant cela. Nous retrouvons les difficultés de Gwen qui a également présenté cette règle (mais n'en a pas produit d'écrits).

Extrait de l'EC (source non identifiée)



Simplifier des fractions.

$\frac{35}{28} = ?$ 5.. ... sur 4

Une fraction reste égale, si on multiplie *le numérateur* et le *dénominateur* par le même chiffre.

$\frac{15}{6} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3}$ donc $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

Complète les égalités suivantes :

$\frac{20}{50} = \frac{2}{5}\boxed{\begin{matrix}\times 10 \\ \times 10\end{matrix}}$ donc $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

$\frac{8}{48} = \frac{1}{6}\boxed{\begin{matrix}\times 8 \\ \times 8\end{matrix}}$ donc $\frac{8}{48} = \frac{1}{6}$

$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}\boxed{\begin{matrix}\times 2 \\ \times 2\end{matrix}}$ donc $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

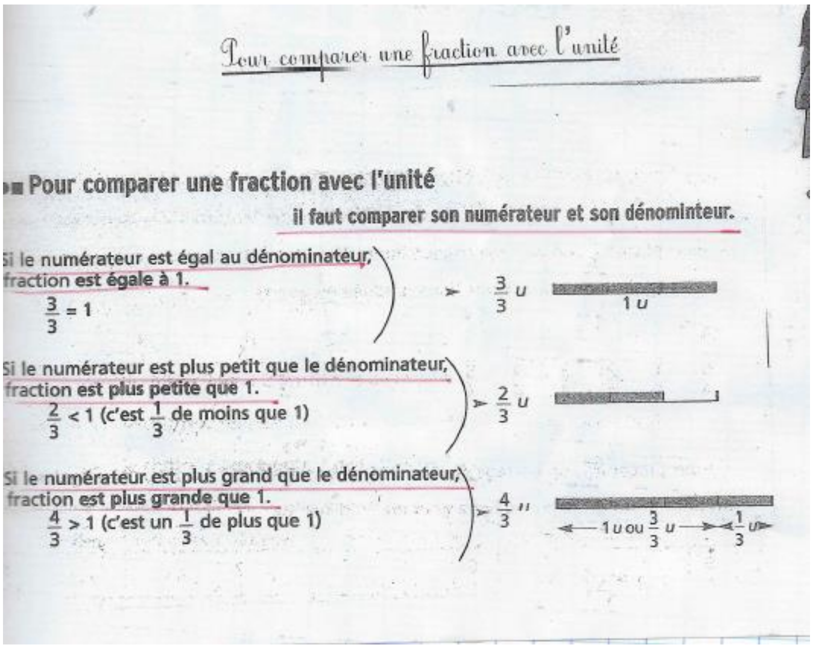
De plus Julien ne voyait pas non plus comment établir en dehors des fractions usuelles les équivalences des écritures des fractions. Son intention de généraliser une propriété particulière des fractions (pour un même nombre plusieurs écritures) le conduit à dépasser les instructions officielles. Enfin le dernier argument de Julien est de nous expliquer qu'il avait compris en formation qu'il fallait se soustraire à un moment donné de l'usage du matériel. C'est pourquoi il est aussi désemparé face à cet objectif des programmes.

De nouveau Julien nous montre à quel point le système de contraintes pèse sur ses choix d'EC écrites. Il doit proposer des EC écrites pour montrer le savoir en jeu et donner des devoirs à la maison, il doit généraliser sans toujours avoir les moyens de le faire. Pour cela il essaie de trouver les « *meilleures* » activités possible qui permettent aux élèves de construire leur apprentissage tout en proposant des mathématiques concrètes et attractives.

4.5.5 Description et analyse de N_8 : pour comparer une fraction avec l'unité

Cette EC reprend des règles données dans l'EC N_5 sur la comparaison d'une fraction avec l'unité. Cette fois-ci la règle est illustrée avec des exemples s'appuyant sur l'unité. Nous pensons que Julien reprend cette règle face aux difficultés de ses élèves. Cet extrait provient du Dico math de Cap Math. Ces écrits montrent le besoin de Julien de recontextualiser cette

EC si difficile pour lui à transmettre. En face de chaque règle correspond un schéma rappelant l'utilisation des bandes, le schéma rappelle que trois tiers d'une unité c'est comme une unité.


Pour comparer une fraction avec l'unité

Pour comparer une fraction avec l'unité
il faut comparer son numérateur et son dénominateur.

Si le numérateur est égal au dénominateur, la fraction est égale à 1.
$\frac{3}{3} = 1$ → $\frac{3}{3}$ u

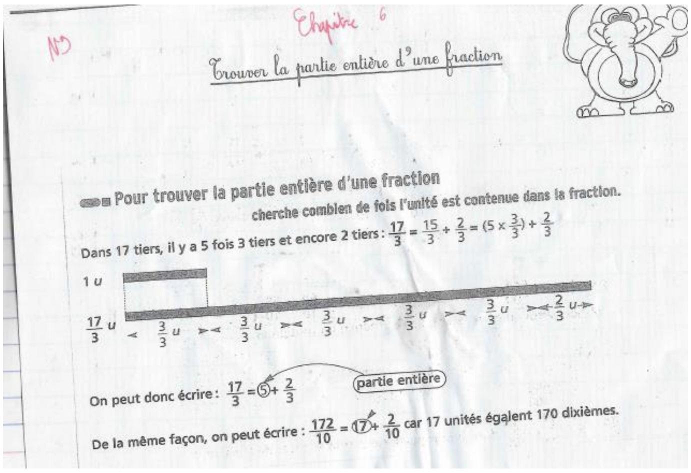
Si le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction est plus petite que 1.
$\frac{2}{3} < 1$ (c'est $\frac{1}{3}$ de moins que 1) → $\frac{2}{3}$ u

Si le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction est plus grande que 1.
$\frac{4}{3} > 1$ (c'est un $\frac{1}{3}$ de plus que 1) → $\frac{4}{3}$ u

4.5.6 Description et analyse de N_9 : trouver la partie entière d'une fraction.

Julien présente une dernière EC sur cet objectif qui lui pose des difficultés. Cette EC montre à partir d'un seul exemple comment écrire une fraction sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction. Pour justifier de la « *disparition* » de l'écriture 3/3, les auteurs du dico math (page 7) s'appuient sur le contexte de mesure de bande et de report de bande. Ainsi ils établissent que trois tiers sont égaux à 1 et que multiplier par 1 revient à garder le même résultat. Les auteurs rappellent ce qu'est une unité et la reportent 5 fois. L'EC, qui est une photocopie du dicomath, est très contextualisée. Les auteurs laissent une référence à l'unité u dans le dessin de la bande mais la retirent dans les expressions mathématiques en ligne.

Ces répétitions dans les thèmes des EC montrent que Julien tâtonne pour construire son PI et s'appuie sûrement sur ce qui se passe en classe (les réactions des élèves, des résultats aux évaluations).



N9

Chapitre 6

Trouver la partie entière d'une fraction

Pour trouver la partie entière d'une fraction
cherche combien de fois l'unité est contenue dans la fraction.

Dans 17 tiers, il y a 5 fois 3 tiers et encore 2 tiers : $\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = (5 \times \frac{3}{3}) + \frac{2}{3}$

On peut donc écrire : $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ partie entière

De la même façon, on peut écrire : $\frac{172}{10} = 17 + \frac{2}{10}$ car 17 unités égalent 170 dixièmes.

4.5.7 Conclusion.

La pratique de Julien est un exemple possible d'enseignant qui questionne le PI mais n'a pas encore stabilisé ses pratiques. Au fil du temps, les EC proposées vont du plus générales et décontextualisées vers des EC moins générales et plus contextualisées. Julien ne produit pas lui-même ou peu d'EC écrites et préfère les emprunter à différentes ressources. Ces différents emprunts conduisent à un brouillage, à un manque de cohérence entre les taches prévues dans les fiches de préparation et les EC produites. Pour autant les EC écrites proposent un contenu mathématique (malgré parfois des imprécisions). La première leçon N_5 présentait très rapidement plusieurs connaissances que Julien reprend sous d'autres habillages N_8. Nous posons les mêmes constats pour les leçons N_7 et N_9. Répétons que Sasha et Solène cherchaient à conserver un équilibre entre dimension cognitive et sociale du PI. Julien prend bien en compte ce qui se passe dans sa classe sans pour autant avoir construit des écrits en rapport avec les activités proposées.
Le PI constitué par Julien est assez emblématique des tensions qui existent entre EC généralisées et décontextualisées.

4.6 Description et analyse d'une séance de classe.

4.6.1 Inscription de la séance dans la programmation.

La séance que nous allons présenter est une séance d'exercices : les élèves doivent proposer une écriture d'une fraction comme somme d'un entier et d'une fraction de l'unité. Cette séance-là n'appartient pas à la première séquence. Julien nous explique qu'il a refait une séquence complète mais qu'il n'a pas rédigé de fiches de préparation : l'examen étant passé et réussi. Le début de la séance consiste à expliquer la leçon N_9 (le texte extrait du Dico Math de Cap Math).

Puis les élèves auront à proposer une autre écriture pour les fractions $\frac{13}{3}, \frac{16}{5}, \frac{14}{4}, \frac{17}{3}$.

L'intérêt, pour nous, de cette séance est de montrer comment en classe Julien prend en charge la difficulté assumée à enseigner cette connaissance. D'après les cahiers du jour, les premiers exercices appelés « *simplifie les fractions* » apparaissent en Février. La séance filmée se déroule le 10 Février 2014.

Si nous comparons les programmations de Solène et de Julien, nous notons des différences dans les choix de programmation. En CM1, en 2014, Solène débute l'enseignement des fractions en Mai alors qu'à la même période les élèves de Julien manipulent les nombres décimaux. Au regard de la progression des bulletins officiels Julien est en accord avec ces derniers. Nous ne pensons pas qu'un enseignant ait mieux rempli son contrat qu'un autre. Nous constatons seulement ces grandes différences de contenu et de programmation qui ne montrent pas une réelle harmonisation et montrent une grande variabilité pour un même territoire. Le système de contraintes qui pèse sur les enseignants et la prise en charge de ces dernières conduisent à ces variabilités malgré des programmes communs. Ces différences individuelles interrogent sur leur rôle dans la construction des inégalités scolaires.

4.6.2 Analyse de la séance.

Pour écrire sous forme d'une fraction de l'unité et d'un entier ces différentes fractions $\frac{13}{3}$, $\frac{16}{5}, \frac{14}{4}, \frac{17}{3}$, plusieurs connaissances sont à mobiliser comme : si le numérateur est égal au dénominateur la fraction vaut 1. Il est aussi nécessaire d'être à l'aise avec les équivalences des écritures telles que : l'addition réitérée d'une même fraction peut s'écrire comme le produit de cette fraction et du nombre d'itération: $\frac{4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} += 4x\frac{1}{4}$. Des connaissances solides sur les tables de multiplication et en calcul mental sont indispensables pour repérer le plus facilement possible le nombre d'unités.

Plus précisément du côté des fractions, une bonne représentation des fractions est nécessaire pour donner du sens à $\frac{13}{3}$. Il est possible de représenter $\frac{13}{3}$ avec 5 disques entiers et d'en déduire qu'il y a 4 disques entiers et les $\frac{1}{3}$ du cinquième disque. Julien choisit comme représentation, la plus commune dans notre étude : les bandes.
Julien reprend l'exemple de la trace écrite soit $\frac{17}{3}$. Il commence à dessiner des bandes unités et s'arrête au bout de 4 unités car son schéma se heurte au bord du tableau et il expliquera aux élèves qu'il n'a plus la place. Il rappelle qu'une bande c'est trois tiers et il explique que dans $\frac{17}{3}$ « *on a mis 5 fois la bande de trois tiers et il reste deux tiers…* »
Puis Julien répond à un élève qui déclare ne pas avoir compris. Face à l'incompréhension de ses élèves, Julien s'appuie alors sur l'EC N_7 (simplifier les fractions). Il rappelle ce que les élèves doivent savoir faire « *C'est exprimer une fraction avec un nombre entier et une petite fraction* ». Puis il explique qu'il faut alors regarder dans la table de 3 (le dénominateur), le nombre qui se rapproche le plus de 17 (dans l'exemple le numérateur).

ENS3 : Une bande, c'est trois tiers, donc ici, on a mis une bande, deux bandes, trois bandes, quatre bandes, cinq bandes. C'est ce que l'on a écrit ici cinq, d'accord ? OK. Et après, pour avoir 17 tiers… Le problème, c'est que cette bande pour avoir le 17, on l'a partagée en deux ou trois parties sauf qu'on garde deux des petites parties. Donc, il reste celle-là. Si on fait la bande… Si on regarde bien, ce qu'il faudrait si on fait la bande…
Élève : Et pourquoi on l'a fait pas maître ?
ENS4 : Parce qu'on n'a plus de place. Je vais essayer de vous l'expliquer autrement. Comment vous l'expliquez compréhensiblement[125] et facilement ? C'est facile !

[125] *Au lieu de manière compréhensible.*

Vous avez 17 tiers, on vous demande de savoir-faire. Écoute bien Charlotte, c'est là que c'est important ! C'est exprimer une fraction avec un nombre entier et une petite fraction. Si on prend 17 tiers, on cherche dans la table de trois le nombre qui se rapproche le plus de 17, donc 15. Car 3 × 5 égalent 15.

Suite à cet extrait un élève demande pourquoi c'est la table de 5 ou de 6 et Julien répond :

ENS5 : Très bonne question. Le trois qui est ici veut dire que c'est la table de trois.
Élève : Pourquoi ?
ENS6 : Parce que c'est comme ça !

Julien a bien introduit les fractions à partir des bandes unités mais pour lui cela rompt vraiment avec ses connaissances. Il ne s'est pas approprié ni le matériel (il ne pense pas vraiment à s'appuyer dessus ni n'a de bandes modèles) ni le discours associé à ce matériel. Il nous explique qu'après quelques séances d'utilisation, il a rangé le matériel car les élèves devaient apprendre à s'en passer. Par ailleurs dans le cahier d'exercices, il n'y a que deux exercices qui évoquent l'usage d'un tel matériel.
La suite de la séance est consacrée à réexpliquer de nombreuses fois de la même manière sur des exemples différents cette « *simplification* ». Les élèves le questionnent beaucoup et Julien essaie de trouver des réponses adéquates. Pour tenter de convaincre ses élèves, il récite le même discours et essaie de « *mécaniser* » le travail demandé :

Élève : Mais pourquoi, si on supprime les deux autres, on ne peut pas supprimer celui-là ?
ENS9 : ***Parce que regarde : 15, c'est 5 × 3 et on a le trois en bas et on sait que quand on a le même nombre en haut et en bas on le barre.***
Un autre exemple. On va faire par exemple 15 quarts.
Dans la table de quoi se rapproche le plus 15 ?
Élève : 12.
Élève : Pourquoi pas 18 ?
ENS10 : ***Bonne question. Parce qu'on prend toujours en dessous***. De quoi se rapproche le plus de quoi? 4 × 3 ça fait 12, et là, ça fait combien ici Anaïs? Le 12, Anaïs, c'est 4 × 3, donc là, ***on a quatre en haut et en bas, donc on peut les supprimer. Donc, quel chiffre va-t-il nous rester?***
Élève : 3.
ENS11 : ***On continue car il faut des exemples pour comprendre.***

Julien réexplique sur deux autres exemples puis demande aux élèves d'écrire dans leur cahier la consigne :

Alors, je t'écoute... Je vais vous aider. Écris la fraction sous forme d'un entier et d'une fraction de l'unité. C'est-à-dire exactement ça. On a un entier sous la forme d'une fraction simplifiée. C'est exactement ça. Une fraction simplifiée, on appelle ça une fraction irréductible, c'est-à-dire 3 sur 5. Alors Brieuc, il dit qu'il ne comprend pas mais il n'est pas concentré.

Il corrige à l'écrit ce qu'il avait appelé une petite fraction qui devient une fraction de l'unité, puis se lance dans une explication où il utilise sans réellement les différencier fraction de l'unité, fraction simplifiée et fraction irréductible. Nous pensons que les élèves ne cherchent pas nécessairement à les distinguer. Quoi qu'il en soit l'émergence de ce vocabulaire utilisé de manière hasardeuse n'est pas pour nous au service de l'apprentissage des mathématiques. Que vont comprendre les élèves ? Ces discours imprécis sont pour nous susceptibles de créer des « *théorèmes en actes* » et peuvent être des obstacles à la compréhension au cours de leur scolarité. Nous pointons dans les pratiques de Julien le même genre de difficultés que dans celles de Gwen. Tous les deux sont soumis à une tension entre proposer des règles généralisées énoncées avec des mots de vocabulaire et les appliquer à un enseignement des mathématiques plutôt contextualisé (dans le cas des fractions). Cette tension s'exprime à l'oral car à la lecture de leur transcription Julien et Solène corrigent souvent seuls leurs imprécisions.

4.6.3 Reconstitution des EC orales.

Une bande qui est de 17/3 contient 5 bandes et 2/3 de la bande. [EC_{rmc}] Dans 17/3 on cherche dans la table de trois le nombre qui se rapproche e plus de 17 donc 15. [EC_G] Pour savoir dans quelle table on cherche, on regarde le nombre du bas. [EC_G] Quand on a le même nombre en haut et en bas on le supprime. [EC_G] On prend un nombre en dessous dans la table car sinon cela ne marche pas. [EC_G]

Élève : Pourquoi on ne peut pas prendre au-dessus et faire moins ? **ENS15 :** Parce que tu aurais une bande unité au-dessus et ça ne marche pas. On prend toujours en dessous.

Les EC ont un caractère très général plutôt d'ordre méthodologique sans être particulièrement accompagnées de sens. Dans cette séance les élèves, au regard du nombre de questions posées, n'ont pas compris pourquoi la méthode fonctionne. Toutefois ils semblent prêts à l'adopter pour réussir l'exercice.
Les EC produites à l'oral sont assez peu précises et en rupture avec le texte collé au début de la séance. Julien nous explique qu'il pensait que cela allait être facile comme leçon car il a consacré beaucoup de séances à l'étude des fractions. Il ajoute qu'il ne trouve pas les aides nécessaires pour construire ses séances dans les ressources recommandées et qu'il s'appuie sur ce qu'il sait en mathématique.
Julien avait exprimé ses difficultés à produire des textes à l'écrit et nous observons également ces dernières à l'oral.

5 Conclusion

Sasha, Solène et Julien introduisent les fractions en utilisant des bandes. Les deux enseignantes instrumentalisent les bandes et s'appuient sans discontinuer sur le matériel ou l'évocation du matériel. Cette prise en charge du matériel est parfois une contrainte (difficulté à décontextualiser et à généraliser) mais une aide pour donner du sens aux écritures et aux premières opérations. Les deux enseignants sont moins soumis à cette contrainte car ils essaient de s'appuyer sur des règles et des définitions plus générales, mais alors ils ont des difficultés à donner du sens aux différentes écritures possibles des fractions et aux premières opérations.
Bien que nous ayons moins de données pour étudier le PI de Julien et de Gwen, il apparaît que les gestes de ces derniers sont en construction. Gwen s'appuie d'année en année sur les écrits des années précédentes et comble le peu d'EC produites par de nombreux exercices. Julien est à la fois en recherche de situations adaptées aux élèves et essaie de trouver des EC

qu'il puisse s'approprier. Julien propose des activités plus robustes et d'autres moins assurées. Julien ne propose pas réellement de mise en commun (dans cette séance) ni d'explicitation des procédures. Il montre une méthode et attend qu'elle soit appliquée. Il écoute et entend les difficultés de ses élèves sans toutefois pouvoir trouver une réponse à leur difficulté si ce n'est faire et refaire.

Ces deux enseignants sont au début de leur carrière, ils assurent la paix sociale et sont soucieux de bien faire. Leurs pratiques débutantes (bien que reconnues expertes par la profession) nous montrent à quel point la prise en charge du PI est une réelle difficulté de ce métier et semble se construire sur plusieurs années. Pour Gwen nous avions noté que la qualité et le sens donné aux EC étaient corrélés au choix de la situation.

Pour Julien, le choix d'une activité robuste et d'EC écrites ne suffit pas pour que les élèves réussissent. Le choix de l'activité n'est pas seul en jeu dans le PI mais également sa place et son rôle dans la dimension cognitive du PI. Solène prenait en charge le rôle de cette activité en reprenant le matériel et en rejouant l'histoire de l'émergence de la connaissance. Sasha donne un rôle bien spécifique à cette activité grâce aux « *situations repères* ».

Nous retrouvons dans les classes de Gwen et de Julien un manque de lien entre l'histoire de la classe et la production d'EC (à l'oral comme à l'écrit). La distance entre ce qui est vécu et les écrits associés et leur utilisation est importante et semble à l'origine du manque de cohérence du PI.

Conclusion générale

Notre interrogation principale, soutenue par un questionnement théorique et des observations diverses, était d'identifier, de décrire et d'analyser le Processus d'Institutionnalisation de professeurs expérimentés dans leur classe, pendant les séances. Pour décrire, il a été nécessaire de redéfinir ce qu'était « *institutionnaliser* » dans des classes de fin d'école primaire. Pour redéfinir il nous fallait pouvoir observer.
Notre étude longitudinale et comparative (chapitre 3) nous a permis de dépeindre des pratiques de professeurs. Dépeindre c'est bien là un des enjeux de notre travail : dépeindre ce que signifie exposer des connaissances (chapitre1) en classe, 30 ans après que le caractère incontournable dans l'enseignement de l'institutionnalisation ait été précisé et dégagé dans les théories didactiques sur lesquelles nous nous appuyons, en référence aux notions associées (notamment la conceptualisation).
Pour cela, nous nous sommes attachée à suivre des professeurs sur une période longue (de 5 ans à 1 an). Cette étude nous permet de dégager quelques résultats selon les axes suivants :

- axe didactique et prolongements possibles à donner au concept d'institutionnalisation.
- axe conceptuel de fractions et de la construction de ce dernier en France.
- Du côté des pratiques et plus précisément ce qu'implique institutionnaliser au regard des pratiques au début du XXI siècle dans des classes de fin de cycle 3.

Dans notre conclusion nous allons présenter les résultats selon les trois axes ci-dessus, puis nous montrerons quelques limites de notre travail. Enfin nous discuterons de la portée et des perspectives que nous envisageons à partir d'inférences, concernant la transition école/collège d'une part et la formation des PE d'autre part (comprenant un travail collectif élargi).

1 Des résultats du côté didactique

1.1 Des propositions de prolongements du concept d'institutionnalisation.

Le chapitre 1 a été l'occasion de faire le point sur l'étymologie du mot « *institutionnalisation* » et le développement de ce concept dans les sciences politiques, sociologiques et didactiques. Ces détours montrent qu'institutionnaliser est un mot associé notamment à l'idée de rendre « *permanent* » et de légitimer une fonction, une institution, un savoir. Dans notre étude, nous nous intéressons à la construction des connaissances des élèves et à la circulation du savoir dans la classe, suite à un enseignement. Initialement l'institutionnalisation est attachée aux moments où ce savoir, ces connaissances sont « *désignés* » aux élèves, notamment à la fin d'une séquence basée sur une situation fondamentale. Les premières définitions proposées par Brousseau dans la Théorie des Situations Didactiques (Théorie des Situations Didactiques) décrivaient l'institutionnalisation en insistant sur son caractère incontournable. institutionnaliser devait ainsi permettre de décontextualiser et de dépersonnaliser les connaissances en jeu mobilisées dans les

situations les plus a-didactiques possible, dégageant ainsi les connaissances attendues,en référence avec la dimension sociale[126] tout en ménageant l'acquisition « *privée* » de chaque élève.
La littérature didactique décrit des moyens pour que la décontextualisation et la dépersonnalisation soient facilitées, voire rendues possibles. En particulier dans le cadre de la dialectique outil-objet (DOO), la décontextualisation peut être favorisée par un changement de cadres, qui a déjà préparé les élèves à un travail sur plusieurs contextes. Plus généralement, la dépersonnalisation, dans la Théorie des Situations Didactiques, peut être prise en charge par des «*moments de formulation* » vécus par les élèves à la suite de leurs premières recherches. Un des moyens pour décontextualiser consiste aussi en la mise en forme et en la généralisation du savoir pour mieux communiquer voire mieux conceptualiser. Restent des questions sur ce processus, sur « *l'étendue* » des généralisations, sur la manière précise d'intervenir pour les enseignants compte tenu du travail des élèves.
Notre interrogation, liée à l'exposition des connaissances attendue à l'issue des séances, nous amène à étudier particulièrement les dynamiques précises entre les activités des élèves et le discours des enseignants, pendant les déroulements en classe. Nous nous appuyons en effet sur l'idée que, si les activités des élèves sont fondamentales pour la construction des connaissances, les accompagnements ciblés que l'enseignant peut réaliser à partir du travail des élèves y sont tout aussi utiles, la proximité (ou la faible distance) entre le nouveau et le déjà-là étant un des leviers d'efficacité possible de ces apports de la part des enseignants (cf. Vygotski).
Etudier le PI en classe nous a ainsi conduite à regarder comment des enseignants expérimentés conduisaient effectivement leur classe pour que les connaissances nouvelles exposées soient éventuellement dégagées des activités travaillées en classe, et ne soient pas éphémères (c'est-à-dire non reprises d'une séance à l'autre). Etudier le PI nous a également conduite à observer comment les enseignants articulaient connaissances anciennes et nouvelles, mais aussi comment les connaissances devenaient un objet « *culturel* » partagé par tous. Nous avons ainsi pu montrer que ce PI était traversé par deux dimensions : sociale (plutôt du domaine public, ici la classe, voire l'école, l'institution) et cognitive (plutôt orientée vers le domaine privé et des acquisitions individuelles). Ces deux dimensions sont en tension et les enseignants tentent de conserver un équilibre entre ces deux dimensions, entre privé et public. De manière assez schématique la dimension sociale (domaine public) amène à exposer des connaissances (favorise la dépersonnalisation) et la dimension cognitive à les faire construire ensemble mais aussi pour un sujet.
Nous parlons de prolongements pour indiquer que dans notre étude, qui s'intéresse ainsi d'abord à ce qui se passe en classe, nous avons dû élargir l'acception du mot en prenant en compte tous les moments où « *du savoir* » semble dégagé – oral, écrit, suite ou non à des activités d'élèves…

[126] *La dimension sociale définie dans le chapitre 1 prend en compte le rôle et les interactions entre les différents acteurs (élèves et maître) pour co-construire les savoirs.*

1.2 Quels moyens sont mis en œuvre dans les pratiques pour décontextualiser et dépersonnaliser dans le cas des fractions ?

Dans les pratiques des professeurs observés, enseignant les fractions, nous avons montré que, , la décontextualisation est peu liée à des changements de cadre. Nous avançons plusieurs explications à cela, les changements de cadre pour être effectifs demanderaient à concevoir des séquences plus longues et, peut-être, un savoir visé plus important. Nous avons vu que le nombre de séances proposé dans les manuels semblait trop conséquent aux PE qui le réduisent en privilégiant l'enseignement des nombres décimaux et des opérations associées. Nous suggérons aussi que, contrairement à un certain nombre de notions issues de la Théorie des Situations Didactiques qui ont été « *vulgarisées* » dans les centres de formation, ce qui est issu de la Dialectique Outil Objet est beaucoup moins l'objet d'étude en formation initiale.
Pour appuyer ce que nous avançons, nous nous appuyons sur le discours et les fiches de préparation des PE suivis. Nous retrouvons des emprunts de vocabulaire provenant de la Théorie des Situations Didactiques chez ces PE. Ainsi les 4 professeurs de notre étude savent ce que sont des variables didactiques (notions utilisées notamment en Staps[127]), ils définissent l'institutionnalisation. Deux des enseignants, à la fin de notre recherche, définissent l'institutionnalisation ainsi : « *La phase d'institutionnalisation est un processus de transformation d'une connaissance construite par les élèves en un savoir validé par l'enseignant. Cette institutionnalisation peut avoir différentes formes : écrite (affichage, leçon sur cahier, schéma...) ou orale* »[128]. Ou encore « *l'institutionnalisation, c'est formaliser les informations issues de la recherche. Lors de cette phase, on va reprendre avec les élèves une définition de la notion, le vocabulaire utilisé, les différentes procédures qui ont permis de résoudre le problème. Il s'agit de fixer les connaissances.* »[129]. Ces deux citations montrent que le mot institutionnalisation est connu mais que les contours de ces définitions sont différents. Nous retrouvons le fait qu'institutionnaliser c'est formaliser, c'est transformer. Dans les deux cas ce travail se réalise dans une action conjointe des élèves et du professeur au regard de la situation. La deuxième citation montre également une dimension de « *mémorisation* », il s'agit pour Solène de retenir l'essentiel. On note cependant une certaine confusion, un manque de distinction, entre les deux dimensions, sociale et cognitive.
Le mot de « *situation* » apparait aussi dans le discours des PE suivis. Ils l'utilisent pour qualifier les activités d'introduction des apprentissages. Ils organisent des mises en commun dans lesquelles les élèves présentent leurs procédures. Ces deux moments que sont la mise en commun et la hiérarchisation des procédures, sont des phases qui tendent vers « *une situation de formulation* » sans pour autant en être au sens de la Théorie des Situations Didactiques. En revanche, sans parler de changements de cadre, proposer des activités dans plusieurs contextes n'est pas connu comme une aide possible pour donner du sens à un concept mathématique même si c'est fait dans certains manuels, sans être toujours explicité comme participant aux processus d'apprentissage. Lorsque cela est proposé dans les classes, les professeurs déclarent souvent que les élèves ont du mal à « *transférer* » leurs

---

[127] *Sciences et techniques des activités sportives.*

[128] *Julien par mail le 11/04/2015.*

[129] *Solène par mail le 13/04/2015*

connaissances. Ils ne conçoivent pas que ces connaissances puissent se construire à partir d'un travail dans des contextes différents.

Du côté de la dépersonnalisation du savoir, la tâche des enseignants semble peut-être moins difficile à mettre en œuvre. La dépersonnalisation est plutôt prise en charge grâce à des modalités de fonctionnement comme l'existence de mises en commun où chacun peut prendre la parole ou encore par la capacité de l'enseignant à mutualiser et à hiérarchiser les procédures de ses élèves. Prendre conscience de ce qu'ont fait les autres élèves, surtout s'il y a des différences, préparerait cette prise de distance avec sa propre action, voire la généralisation qui suit. Pour autant, nous ne savons pas si la dépersonnalisation est effective. Il est tout à fait pensable que les élèves fassent coexister plusieurs connaissances, adoptent des procédures différentes dès leurs. C'est bien l'institutionnalisation conduite par le professeur qui explicite, hiérarchise, formule ce qui est important à comprendre et à retenir. Le caractère diffus de l'institutionnalisation laisse à la charge des élèves de saisir ou pas les mots de vocabulaire introduits. De plus les éléments incontournables à la construction d'un concept n'étant pas parfois repérables, c'est encore une fois à la charge des élèves d'identifier ce qui est de l'ordre du contexte (le presque anecdotique) et de l'ordre du savoir (de l'ordre de l'indispensable). Cette grande « *liberté* » dans la lecture des déroulements et des contenus est à notre sens une cause de création des inégalités scolaires.
Institutionnaliser est un terme connu par des maitres formateurs, en revanche les moyens pour décontextualiser et dépersonnaliser sont réalisés en acte et moins théorisés.
Dans notre étude, nous avons pu relever quelques-unes de ces connaissances didactiques en acte, comme la nécessité d'Instrumentaliser la bande de papier représentant l'unité, mais aussi de donner du sens à l'unité (ne pas confondre unité de mesure et le nombre 1) , d'utiliser à bon escient le matériel pour valider ou remobiliser des connaissances. Ces connaissances didactiques en acte des professeurs apparaissent dans les pratiques de ces professeurs des écoles lors de la prise en charge des moments d'exposition du savoir. Ils prennent en compte les deux dimensions du PI, aménagent des phases de rappels, construisent des textes intermédiaires, laissent les élèves discuter entre eux (parfois au risque de mettre en péril la paix sociale).
C'est pourquoi nous pensons que certains professeurs construisent des connaissances didactiques « *en acte* » à ce sujet.

1.3 De l'institutionnalisation vers les Expositions de Connaissances.

Suite à nos premières observations et aux décalages possibles, nous avons préféré utiliser les termes d'Exposition des connaissances (Robert 2015) plutôt qu'institutionnalisation pour évoquer ces moments où on parle du savoir, à cause de la nature et du contenu des textes produits tant à l'oral qu'à l'écrit et vu la diversité des contextes de productions de ces textes (qui peuvent être limités). En effet, ces derniers peuvent être limités étant peu décontextualisés et souvent assez peu dépersonnalisés. Ce que nous avions observé ne correspondait pas à la définition donnée. Exposer des connaissances est une expression plus large qui peut prendre de ce fait en compte la diversité de ce qui est proposé dans les classes. Nous avons alors distingué les EC écrites et orales car leurs conditions de productions et leurs effets nous ont semblé différents. Nous avons également introduit la

notion d'EC générales sans hiérarchiser ces dernières entre elles. Ce qualificatif permet de décrire des textes assez fréquents qui proposent, souvent a minima, des règles qui fonctionnent en dehors du contexte dans lequel elles ont été produites, mais qui peuvent être encore génériques ou générales, mais sans quantification « *même implicite* » par exemple.
Quand les textes étaient décontextualisés et dépersonnalisés (chapitre 8) nous avons noté une perte de sens possible entre les activités précédentes des élèves et ce texte de savoir. Cela nous a conduite à parler de distance (plus ou moins grande proximité) entre l'activité proposée et les textes produits, en relation étroite avec la manière précise dont les contenus sont présentés aux élèves. Trop proche de leurs activités, le texte semblait souvent correspondre davantage à une correction qu'à une présentation du savoir, trop décontextualisé il n'aidait plus à la construction du savoir faute de liens avec les activités. Cette nécessité d'une juste distance est ressentie par les PE, Solène et Sasha craignent de « *perdre leurs élèves* », c'est pourquoi elles proposent ce que nous avons appelé des textes intermédiaires au travers des phases de rappel ou des « *situations repères* ». En revanche, Julien propose (peut-être trop) vite des textes décontextualisés, il s'en aperçoit et recontextualise. Il semble dès lors que les proximités ascendantes, qui qualifient les explicitations des liens entre activités et savoir, amorcées par les phases de synthèse mais ne s'y réduisant pas, sont importantes pour donner au PI la dimension cognitive attendue. L'étude de ces proximités discursives (ascendantes, descendantes, horizontales) qui sont du côté de la prise en charge de la dimension cognitive du PI, nous a conduite à étudier ce que nous appelons des proximités didactiques. Les proximités discursives sont des proximités didactiques dans le sens où elles concourent à aménager une « *juste distance* » entre l'activité proposée et le texte du savoir. Ce qui se passe pendant les situations repères de Sasha (chapitre 7) relèverait ainsi de telles proximités didactiques car elles accompagnent la construction du concept en s'appuyant à la fois sur la situation en jeu, les procédures privilégiées et en exposant les premiers éléments de savoir. Nous rappelons qu'à la suite de ces textes intermédiaires, cette professeure des écoles propose ensuite des textes plus décontextualisés, plus généralisés.

2 Une interrogation sur le texte du savoir et l'institutionnalisation : les effets de l'absence de prise en charge de tous les aspects des fractions dans le programme français.

Le chapitre 2 nous a permis de montrer que le concept de fractions comme nombre pouvait résulter d'un travail sur les 5 aspects des fractions répertoriés[130]. Ces 5 aspects sont connus dans les travaux anglo-saxons. L'approche française majoritaire n'est pas de travailler sur ces 5 aspects mais plutôt sur deux sans les présenter explicitement aux élèves voire aux enseignants: l'aspect partie d'un tout et l'aspect mesure. Les programmes français en particulier orientent vers un travail sur ces deux derniers aspects. Les fractions, en primaire,

[130] Le premier aspect : fraction partie d'un tout. Les quatre autres reposent en partie sur le premier : fraction mesure, fraction-quotient, fraction-ratio et fraction-opérateur.

sont enseignées conformément aux instructions officielles comme des nombres. Les programmes ne permettent pas aux enseignants de faire l'ensemble des opérations avec ces nouveaux nombres. De plus ces nouveaux nombres ne sont pas utilisés lors de l'étude d'autres notions, telle la proportionnalité. Ainsi les coefficients de proportionnalité sont entiers ou décimaux. Ces « *nouveaux nombres* » semblent dans les parcours de Solène et Sasha essentiellement au service de la construction des nombres décimaux, après une étude des fractions décimales. Dans le projet de Gwen et de Julien, l'étude des fractions décimales est absente. Nous ne savons pas comment, dans ces classes-là, les décimaux sont introduits. Nous n'avons pas relevé dans les différents cahiers analysés des travaux d'élèves montrant le lien et les jeux d'écriture entre fraction décimale et nombres décimaux sous leur écriture décimale. Pour ces deux classes-là, nous nous demandons quelles sont alors les raisons d'être de cet enseignement si ce n'est répondre aux injonctions institutionnelles. Nous comprenons alors les difficultés des enseignants pour produire un texte de savoir. Les fractions, au regard des programmes et des deux aspects travaillés, n'ont pas encore acquis le statut de nombre. En effet la non prise en charge des 5 aspects ne permet pas de construire un concept solide, riche, s'appuyant sur des contextes variés et avec des grandeurs continues et discrètes. Le sens donné aux fractions, comme nous l'avons montré, est assez pauvre. Il apparaît alors qu'écrire un texte sur cet objet mathématique relève d'une tâche quasi impossible.

Dans les classes suivies, l'accent est essentiellement porté sur le codage en écriture fractionnaire de différentes représentations. Nous comprenons alors les difficultés des professeurs pour proposer des textes qui répondent à des critères de décontextualisation. En particulier nous postulons (Robert 1998) qu'il existe, compte tenu des programmes, des types de notions pour lesquelles il est difficile de trouver des situations menant à une institutionnalisation au sens de la Théorie des Situations Didactiques. Cela met notamment en jeu ce que Pouyanne (Robert & Pouyanne 2004) appelle des notions non encore formalisées, voire non encore formalisables. Pour l'enseignement des fractions, tel qu'il est proposé, nous sommes au-delà encore des problèmes de notions non formalisables, même si les fractions en sont un bon candidat. Les difficultés liées au partionning, à l'unitizing (relevés dans les chapitres 2, 4,5,6,7 dans les pratiques des PE), et l'absence de textes de référence conduisent à cette tâche impossible qui est d'écrire un texte de savoir décontextualisé.

Pour autant, nous avons relevé que des règles inscrites dans les programmes, telle que la comparaison des fractions d'unité à l'unité, ne sont pas nécessairement données aux élèves (deux classes sur quatre). Il n'existe pas non plus une seule définition commune pour dire ce que sont numérateurs et dénominateurs ce qui rend difficile la comparaison des énoncés. Cela pose la question de l'homogénéité de ce qui est enseigné sur le territoire français. Ces règles ne sont pas explicitement formulées dans les instructions en vigueur, il est alors possible qu'une classe d'élèves entre en sixième sans jamais avoir formulé de règles généralisées sur cette comparaison à l'unité.

Pour ouvrir le débat, nous nous demandons ce que nous penserions d'une classe qui n'aurait jamais formulé que l'adjectif s'accorde « *en genre et en nombre avec le nom auquel il se rapporte.* ». Règle qui n'est pas si simple à enseigner, ni même à formuler mais que nous avons retrouvée dans les cahiers de leçons de Français des quatre PE. Bien que nous ne le prouvions pas ici, nous pensons que culturellement écrire des textes de savoir en mathématique n'est pas aussi « *routinisé* » qu'en orthographe par exemple. Les écarts constatés, à la fois dans l'introduction des fractions, de leur « *reprise* » dans l'enseignement d'autres notions et surtout dans les textes de savoir proposés aux élèves, nous permettent d'avancer qu'un traité à l'attention des professeurs des écoles pourrait être une aide (Neyret 1995). Ce traité pourrait présenter, pour chaque notion, des définitions et des formulations qui seraient incontournables. Des recherches (Tempier 2013), montrent que lorsque des textes sont inclus dans une ressource, ils ne sont pas repris même partiellement par les enseignants. De même, nous avons constaté que les recueils de résumés accompagnant les ressources telles « *dico math* » ou « *le mémo d'Euro Maths* » ne sont pas non plus nécessairement utilisés. Nous avançons plusieurs explications à cela, d'une part nous avons montré que les enseignants croisaient plusieurs ressources, empruntant à l'une ou à l'autre essentiellement pour les activités introductives ou les exercices. D'autre part, penser et écrire des textes de savoir ne semble pas constitutif des pratiques. Enfin élaborer seul un texte écrit alors que la notion abordée est en germe, relève de la tâche impossible pour un enseignant polyvalent non expert dans la discipline.

3 Des résultats du côté des pratiques.

3.1 Un processus en tension entre dimension cognitive/sociale

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté les deux dimensions du PI. Nous avons établi les tensions entre ces deux dimensions. Elles s'expriment de manières différentes dans les pratiques de nos quatre professeurs des écoles. Sasha ne propose pas de longues phases de mises en commun mais met en place des dispositifs qui lui permettent de prendre en compte à la fois la dimension sociale et la dimension cognitive et plus personnelle des élèves. Les trois autres enseignants font vivre les PI surtout dans la dimension sociale. Le PI est alors caractérisé par des travaux essentiellement collectifs, peu de travaux individuels et enfin les phases de mises en commun souvent longues (de 10 à 30 minutes). Bien que la dimension sociale participe à la dimension cognitive, peu d'activités sont proposées favorisant l'apprentissage individuel et l'intériorisation personnelle des contenus.

Sasha et Solène mettent en place un dispositif de régulation leur permettant d'évaluer un peu ce que savent faire leurs élèves. Pour Sasha ce dispositif de régulation passe par les situations repères (chapitre7) et pour Solène par de longues phases de rappels (chapitre 4 et 5). Les choix de ces professeurs sont fortement marqués par leur composante personnelle, ainsi Sasha qui a une maitrise d'histoire dit être attachée aux écrits, elle déclare ne pas pouvoir laisser les élèves sortir de la classe s'ils n'ont pas d'écrits. Solène, psychologue de formation, pense que la verbalisation est la clé de voûte de l'apprentissage. Enfin Gwen et Julien ont fait des études Staps. Ils avancent le caractère important du « *collectif* », du « *apprendre ensemble* ». Nous voyons bien comme il est facile de tomber dans la caricature, pour autant nous ne pouvons que constater que la formation universitaire de ces PE marque leur façon d'envisager l'apprentissage en mathématiques. C'est pour cela que nous avançons de nouveau l'idée de la nécessité de construire une « *culture* » commune fortement enrichie de connaissances didactiques qui auront fait l'objet de transpositions didactiques prises en charge par les chercheurs. Cette « *culture* » devrait être construite en relation avec les chercheurs, les formateurs et les professeurs des écoles. Des colloques comme ceux de la

COPIRELEM[131] y participent. Pour essayer de préciser notre idée, nous avançons qu'il nous semble important qu'il y ait un cadrage du contenu à transmettre dans les centres de formations.

3.2 Un processus en construction dans les pratiques

Brousseau a défini l'institutionnalisation et a développé ses paradoxes grâce à des observations de classes et à des expérimentations à partir de situations fondamentales. institutionnaliser était pour les enseignants de terrain avec qui il a travaillé un fait incontournable : d'après les enseignants, les situations seules ne suffisaient pas à leurs élèves pour construire leurs connaissances.

Dans les chapitres 4,5,6,7 et 8 nous avons montré qu'institutionnaliser n'avait pas le même visage en 2015 qu'en 1980 dans les classes de l'école Michelet. Institutionnaliser, exposer des connaissances ne sont pas des activités de l'enseignant si visibles que ça, voire peuvent être quasi absentes sous la forme d'un écrit. Cet effacement de l'institutionnalisation se fait souvent, dans les classes des maitres formateurs, au profit d'une prise en charge plus ou moins assurée de la parole des élèves. La présence de nombreuses proximités ascendantes montre comment les rapports se sont inversés. Les élèves essaient de dire ce qu'ils ont appris, comment ils ont fait, voire ce qu'ils ont découvert, l'enseignant de son côté essaie à chaud, plus ou moins en improvisant, de produire un texte qui « *colle* » à ce que viennent de formuler les élèves. L'enseignant jongle alors entre rappel ou non de la situation, prise en compte ou non de (tout) ce qui est dit par les élèves, et introduction parfois d'éléments de savoir un peu plus généralisés. Le PI est alors un processus de pas à pas qui ne correspond pas au schéma proposé au chapitre 1.

Etudier le PI nous a montré que ce processus est variable pour un même enseignant et entre enseignants : il dépend des contenus, des ressources utilisées, des programmes, des croyances, comme la nécessité de manipuler pour apprendre, de phénomènes de vulgate pédagogique. Ainsi, poser la question « *Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?* » relève d'une de ces « *modes pédagogiques* ». Cette question est effectivement une occasion de recueillir la parole des élèves mais sans apport du professeur, elle semble perdre une partie de son intérêt.

Le PI est très différent d'un enseignant à un autre, il semble attaché aux conceptions mathématiques et didactiques du PE, à son expérience. Faire vivre un PI dans une classe de primaire semble bien relever d'un « *savoir d'expérience* », c'est-à-dire un ensemble de gestes professionnels attaché à un contenu mathématique construit sur un temps long.

[131] *Commission permanente des IREM sur l'enseignement des mathématiques.*

3.3 Un PI au carrefour de l'installation de la paix scolaire et de l'exercice de la vigilance[132] didactique

L'étude comparée des quatre maitres formateurs dont les anciennetés de service sont différentes (15 ans pour Solène et Sasha et 5 ans pour Gwen et Julien), nous a permis de voir que les PI dans les classes des professeurs expérimentés étaient plus « *routinisés* » que dans celles des jeunes maitres formateurs. Cette différence est marquante pour Julien qui tâtonne dans le choix de ses écrits, qui propose plusieurs fois le même contenu mais plus ou moins contextualisé.

Solène et Sasha, fortes de leur expérience, pensent à instrumentaliser la bande unité et s'appuient dessus tout le long de l'enseignement des fractions. Aucune des ressources utilisées n'explicite cela, c'est une connaissance didactique en acte. Nous avons relevé d'autres connaissances didactiques en acte comme la présence de textes intermédiaires (pris en charge à l'oral ou à l'écrit). Ces textes intermédiaires sont constitutifs du processus de conceptualisation. D'autres connaissances didactiques en acte apparaissent dans notre étude comme la conscience de la difficulté de prendre en charge l'unité sans pour autant pouvoir traiter cette difficulté. Enfin, la présence dans ces deux classes de dispositifs de régulation est aussi une marque de ce que nous appelons les connaissances didactiques en acte beaucoup moins présentes dans la classe de Gwen et avec quelques prémices dans la classe de Julien. Ces connaissances didactiques en acte sont vraisemblablement le fruit d'une longue expérience dans le même niveau scolaire. Ces connaissances en acte sont enrichies parfois pour mieux les comprendre de lectures assidues de certaines ressources, d'une bonne connaissance de plusieurs programmes successifs et d'observations de l'activité de leurs élèves facilitées par l'aisance acquise dans les contenus. Suite à ces divers enrichissements, elles ne sont plus considérées construites en acte.

Enfin, nous postulons que la mission de formateur de ces enseignants, qui consiste à aller à la rencontre de professeurs des écoles stagiaires, nourrit leur réflexion et contribue à construire ce type de connaissances. Cependant les variabilités de fonctionnement des deux classes de Solène et Sasha autour d'un même thème et d'après les mêmes ressources nous interrogent. Les interrogations ne se placent pas sur la variabilité des pratiques qui est un résultat connu mais plutôt sur la lecture de jeunes enseignants qu'elles reçoivent de ces variabilités.

3.4 L'institutionnalisation est-elle enseignée en formation ?

Ces quatre enseignants, de par leurs fonctions, vont accueillir des stagiaires et les former. Plusieurs questions émergent alors : que pourrait retenir un stagiaire de l'observation de ces classes ? Qu'est-ce qu'un stagiaire va comprendre de ce qu'est l'institutionnalisation ? Va-t-il en voir des manifestations autres qu'une EC écrite ?

En formation, en ce début d'année 2015, nous avons demandé aux étudiants de nous donner les grandes étapes d'une fiche de préparation. Tous ont indiqué qu'il fallait penser à

[132] *La vigilance didactique est du côté du savoir mathématique, des connaissances didactiques mais aussi de leur mise en fonctionnement dans l'acte d'enseigner (Butlen et al, 2011)*

l'institutionnalisation. Tous l'ont définie comme une trace écrite à proposer et ont demandé s'ils pouvaient s'appuyer sur des fiches trouvées sur Internet.
Il ne nous suffit pas de déclarer qu'il faut montrer les connaissances en jeu, il est important de réfléchir à la gestion et au contenu de ces moments d'exposition de connaissance.
Le fonctionnement et les routines de Sasha peuvent être, en partie transmis car portés par des écrits. Le fonctionnement de Solène tout en improvisation, en réactions à chaud, semble moins accessible pour un stagiaire qui n'a pas la même expérience ni les mêmes connaissances, sauf à l'expliciter beaucoup. Une réflexion collective sur cette partie de l'enseignement, sur les alternatives en classe, appuyée sur des observations ou des vidéos si c'est possible (et on a vu les réticences des enseignants), enrichie par notre travail, peut sans doute préciser l'outillage des débutants à ce sujet.

4 Difficultés méthodologiques et limites de la recherche

Rappelons que notre étude s'est réalisée après avoir pu plus ou moins surmonter certaines difficultés méthodologiques. La première difficulté que nous n'avions pas anticipée est liée à la résistance des maîtres formateurs à montrer l'ordinaire de leur classe et pas seulement des situations introductives. Cette difficulté surmontée d'autres sont apparues liées à l'envie des maitres formateurs de changer de fonction. Nous n'avons pas pu suivre au-delà de 1an Julien et Gwen pour cette raison : ils sont devenus conseillers pédagogiques donc complétement déchargés de classe.
La difficulté la plus essentielle a été d'identifier les moments consacrés à l'exposition des connaissances. Nous sommes arrivée à dégager certains indicateurs (comme l'installation au sol lors des mises en commun ou le fait de ranger le matériel sur les tables), seulement après avoir identifié les routines des professeurs. Pour autant des expositions de connaissances ont aussi lieu en dehors de ces moments, leur caractère diffus (c'est-à-dire que les Ec apparaissent lors de discussions de rappels à l'ordre) nous a rendue prudente et nous ne les qualifions d'EC que parce qu'elles sont reprises et rappelées lors d'autres séances. C'est bien l'étude longitudinale qui nous permet d'étiqueter certaines interactions orales comme des EC. Nous avons aussi conscience que le choix d'étudier le PI dans des classes de professeurs experts est une limite à notre travail. Notre travail repose sur l'étude de professeurs expérimentés utilisant des ressources conseillées en formation : ces conditions ne montrent qu'une partie des pratiques potentielles au sujet de l'institutionnalisation. Cependant, étudier le PI dans des classes de professeurs experts nous a permis de prolonger les résultats déjà posés à partir de l'observation d'enseignants débutants ou moins reconnus par l'institution. Nous pouvons lire « *Tout se passe comme si, le plus souvent, l'intention du professeur n'était pas déterminée en termes de savoirs, en tout cas pas précisément.* » (Margolinas & Laparra 2011, p.28). C'est effectivement ainsi que nous pouvons percevoir le PI à l'échelle d'une ou deux séances non consécutives. Nous avons montré que celui-ci était pris en compte mais qu'un ensemble de contraintes le rendait diffus et parfois non identifiable à l'échelle de la séance. Les professeurs de notre étude ont les moyens « *théoriques* » de garantir l'existence d'un PI et pourtant… Pour ces professeurs qui connaissent leurs ressources, qui ont gagné la paix sociale voire scolaire, nous pouvons penser qu'institutionnaliser est peut-être bien plus difficile qu'il n'y paraît.
Nous n'avons d'ailleurs pas proposé de texte de savoir sur les fractions à destination des PE. La tâche est complexe comme le montre aussi l'expérience que nous avons faite lors d'un

atelier de la Copirelem (Allard, Ginouillac 2014). C'est avec difficulté que les participants-formateurs ont produit des écrits sur la proportionnalité à destination des élèves. Les productions montrent des EC peu décontextualisées et assez peu généralisées, ces EC ne comportent en revanche aucune erreur.
L'institutionnalisation est une question vive en didactique et pour l'instant peu de solutions sont apportées pour aider précisément les enseignants et les équipes de formateurs. La question du traité se pose ainsi que les conditions de son écriture. Un traité à destination des PE peut-il être l'œuvre d'une personne ou est-ce la responsabilité d'un collectif dont il faudrait déterminer les différentes composantes (chercheurs uniquement, association de chercheurs, formateurs, enseignants du premier degré ?). Il nous semble nécessaire que collectivement nous réfléchissions à la spécificité des mathématiques enseignées en primaire et à des dispositifs permettant d'apprendre à exposer les connaissances.
Nous pouvons conclure : quels que soient les enseignants débutants ou experts, institutionnaliser est une tâche difficile. Maintenant, il nous semble important de dépasser ce constat.

Notre étude éclaire essentiellement la description du PI dans les classes Nous avons étudié le PI d'une notion nouvelle en fin d'école primaire introduite de manière très contextualisée (dans un contexte de longueur et de mesurage). Nous savons que certains de nos résultats sont liés à l'étude spécifique de cette notion. Nous rappelons que nous avions dû nous centrer sur l'étude en particulier d'<u>une</u> notion pour recueillir un corpus raisonnable et déjà considérable tant les séances observées sans lien entre elles ne nous permettaient pas de comprendre ce qui était en jeu dans le PI. Notre étude confirme qu'en primaire les questions liées aux expositions de connaissances peuvent être différentes en fonction des situations proposées (selon qu'il est plus ou moins possible de se détacher du contexte) Les contraintes associées tant du point de vue du matériel que de ce qui est enseigné permettent d'avancer qu'il existe « *des Processus d'Institutionnalisations* », des potentialités de généralisation et de décontextualisation variables selon la notion abordée. Actuellement c'est aux professeurs de déterminer dans quel cas il est possible de généraliser, voire de formaliser. Une étude précise de différentes formes de généralisation à partir des activités des élèves, par-delà les décontextualisations, reste peut-être à faire.

Une des premières limites de nos résultats se place ici, en relation avec la diversité des savoirs à enseigner et avec le « *contenu* » spécifique des textes de savoir correspondant. Par exemple qu'en est-il dans les classes de l'exposition des connaissances lors de l'enseignement des techniques opératoires ? Est-il nécessaire d'avoir un texte de savoir pour l'enseignement de techniques opératoires? Qu'en est-il du PI pour l'enseignement de la géométrie ? Retrouve-t-on pour la géométrie les tensions entre introduction des connaissances et expositions de connaissances décontextualisées[133] ?

[133] Sylvie Henry débute une thèse sur ce thème, suite à un travail de mémoire sur l'institutionnalisation en géométrie lors de la transition école-collège.

5 Quid des élèves ?

Un des rôles du maître est la prise en charge de l'institutionnalisation. C'était là notre objet d'études. Nous avons montré que les PI prenaient en compte de manière assez importante les paroles des élèves. Nous avons pu illustrer à travers les interactions et en nous appuyant sur les vidéos disponibles certains éléments de l'activité des élèves. Pour autant nous ne les avons pas systématiquement interrogés. Dans une classe, celle de Solène, nous avions demandé aux élèves de nous expliquer ce qu'étaient les fractions, ce qu'ils avaient compris. Le groupe d'élèves interrogés nous a expliqué que c'était un nombre mais sans réussir à justifier cela. Puis certains audacieux sont allés chercher des bandes pour nous faire revivre les premières situations. Ce qui est sûr, c'est que ces élèves construisent des apprentissages, n'hésitent pas à recontextualiser pour expliquer ce qu'ils ont compris. Nous ne savons pas ce qu'ils repèrent dans l'activité de leur professeur pour identifier les phases d'exposition des connaissances lorsque ces dernières ne sont réalisées qu'à l'oral. Nous ne sommes pas certaine que les élèves aient compris l'importance d'un texte à apprendre, d'un texte sur lequel s'appuyer pour mieux échanger, mieux comprendre. Nous savons que les résultats des évaluations nationales sont meilleurs dans les classes des professeurs plus expérimentés. Pour autant nous ne pouvons réellement conclure sur les apprentissages effectifs des élèves.

Butlen & Pezard (2003) ont montré l'importance de l'écriture de textes intermédiaires par les élèves, pour conceptualiser. Nous avons montré que la présence d'écrits intermédiaires pris en charge par l'enseignant était une aide pour réguler. Ces écrits sont sûrement aussi une aide pour la mémorisation pour montrer ce qu'il y avait d'important à retenir. Mais nous n'en avons pas fait la preuve.

6 Portées et perspectives.

L'étude des pratiques de professeurs expérimentés nous a permis de faire émerger les contraintes mais surtout la manière dont ils les prennent en charge pour faire vivre le PI. La voie montrée par Sasha semble intéressante à exploiter. Les situations repères permettent individuellement aux élèves d'intérioriser des connaissances. La régularité de la présence de ces situations et des déroulements associés permettent aux élèves d'anticiper sur ce qu'ils vont avoir à faire. Ils savent qu'immédiatement ou à proximité de la découverte ils vont avoir à refaire une activité proche et de manière individuelle. Les conditions pour rendre nécessaire un apprentissage sont posées dès le début de la séquence. Nous avons noté que les adaptations proposées par Sasha sont parfois source de difficultés car elles modifiaient un peu trop l'activité de départ. Les raisons sont liées à des connaissances didactiques parfois peu assurées ou construites en acte (après des essais-erreurs auprès des élèves des classes précédentes). Nous reprenons l'idée avancée d'un collectif d'enseignants (chercheurs, formateurs, enseignants) pour réfléchir à des déroulements de séance prenant en compte l'institutionnalisation. Nous sommes persuadée que dans ce domaine beaucoup sont à redéfinir en fonction des nouvelles contraintes d'enseignement. Nous avons vu que deux de nos enseignantes font preuve d'inventivité, savent prendre en charge ce que les ressources ne pointent pas. Nous pensons poursuivre nos recherches auprès de professeurs formateurs expérimentés car experts en gestion qui proposent des lieux d'expérimentation apaisés et peuvent être des collègues pertinents lors de recherche collaborative.

Au moment où nous écrivons ces lignes, nous pensons à la place des nouvelles technologies dans l'enseignement. L'une des « *modes* » pédagogiques actuelles inspirée par une forme particulière d'usage de la vidéo est la pédagogie inversée. Ce phénomène de plus en plus encouragé par les inspecteurs et formateurs nous interroge. Cette pédagogie pousse à penser le texte du savoir en premier lieu au contraire de ce qui semble se passer dans les classes. En effet ce qui semble guider les pratiques, en primaire est en premier lieu de trouver des activités qui permettent aux élèves d'être « *acteurs de leurs apprentissages* ». Notre étude nous permet de dire que la transmission de connaissances, sans être absente du jeu du professeur est en partie une tâche qui n'est pas pensée a priori. Le professeur choisit une activité selon des objectifs d'apprentissage et ensuite pense à organiser sa classe, à maintenir la paix scolaire, à écouter ses élèves, à différencier et enfin à exposer le savoir en cohérence avec ce qui s'est passé (ou ressenti) dans la classe.

Nous voyons dans la pédagogie inversée, une pratique qui va changer les contours du PI, les tensions entre collectif et individuel vont sûrement se jouer autrement, c'est en cela que l'observation de telles classes fait partie de nos perspectives de recherche.

À côté de cela se pose une autre question : est-il possible d'apprendre des mathématiques sans écrits ? Et si oui, alors quelles seront les conditions de cette forme de transmission ?

Et si non, que devons-nous envisager collectivement pour prendre en charge cette question en formation ?

Un de nos axes pour poursuivre notre travail, largement pris en compte dans les travaux de Robert et al (2015) et Robert & Vandebrouck (2014), est d'étudier les moments d'expositions de connaissance en début du collège. Nos questions sont à la fois du côté des élèves et des enseignants. Comment les élèves vont-ils appréhender les cours de mathématiques en sixième ? Comment les enseignants du début du collège amènent-ils (ou pas) les élèves à comprendre, apprendre des textes présentant des connaissances ? Les textes proposés sont-ils si différents de ceux du primaire ?

Ces auteurs montrent que les professeurs de collège sont sensibilisés aux questions de « *rigueur* » liées aux formulations. Une de leur contrainte se situe dans l'articulation du cours et des activités, et notamment dans le jeu des proximités descendantes, peu présentes en primaire, on l'a constaté. Les auteurs montrent que les professeurs de leur observation ont un questionnement sur la manière d'amener cet écrit et parfois sur le contenu. Les professeurs des écoles ont un questionnement sur le contenu mais pas orienté sur le niveau de formalisation et de généralisation. Ils cherchent à savoir ce qu'ils ont le droit ou non de dire, sur comment le dire et l'écrire et finalement sur l'intérêt ou non de proposer des textes écrits en primaire.

Bibliographie

ADJIAGE, R (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*. Thèse de Doctorat. Université Louis Pasteur : Strasbourg. 461 pages
https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012146/document

ALAJMI, A.H.(2012) How do elementary Textbooks adress fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan and Kuwait. *Educational Studies*, 79, 239-261.

ALLARD, C.(2010). *Des cahiers pour apprendre ? Etude de pratiques enseignantes sur leurs traces écrites en mathématiques.* Mémoire de master, Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

ALLARD, C.(2011). Apprends ta leçon : oui mais quelle leçon ?, *actes du 38ecolloque COPIRELEM, « Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants »,* 22-23-24 juin 2011, Dijon.

ALLARD, C. & GINOUILLAC, S.(2014). De la ressource à la séance de classe : le cas de la proportionnalité en cycle3. *Actes du 41ecolloque COPIRELEM, « Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages à l'école primaire»*,18-19-20 Juin 2014, Mont de Marsan.

ARDITI, S. (2011). *Variabilités des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens*, Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII.

ARTIGUE, M.(1989). *Epistémologie et didactique*. Cahier de DIDIREM,3. Paris : IREM.

BEHR, M.LESH, R.,POS,T.,& SILVER E.(1983). Rational Number Concepts. In R.LESH & M.Landau (Eds) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* pp. 91-125. New York: Academic Press.

BOLON, J. (1993). L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. Grand N, 52, 49-79. Grenoble : IREM

BRIAND, J. & PELTIER, M-L. (2003) : Etude de la Disme de Stévin de Bruges.
https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00495125/en/

BRIDOUX, S. CHAPPET-PARIES, M. GRENIER-BOLEY, HACHE, C. ROBERT, A. (2015). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques : secondaire et début de l'université. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz 14,1-14. Paris : IREM.*

BRISSIAUD, R. (1998) Les fractions et les décimaux au CM1: une nouvelle approche. *Actes du XXVe Colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, 147-171.

BROUSSEAU, G. (1981). *Problèmes de didactiques des décimaux.* Recherche en didactiques des mathématiques. 2/1, 37-128.

BROUSSEAU, G. (1984). *Le rôle du maître et l'Institutionnalisation. IIIème école d'été de didactique des mathématiques.* http://guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maître-et-l'institutionnalisation-1984/ (consulté le 24/09/2015).

BROUSSEAU, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherche en didactiques des mathématiques.7/2,33-115.

BROUSSEAU, G. (1988). Les différents rôles du maître BULLETIN AMQ, mai, 14-24:
https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/497481/filename/Les_differents_roles_du_maître.pdf/(consulté le24/09/2015).

BROUSSEAU, G. (1997). La théorie des situations : le cours de Montréal de 1997. http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987). *Rationnels et décimaux dans le cadre de la scolarité obligatoire : compte rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence* (DEA et Doctorat de Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux I.) http://guy-brousseau.com/1883/rationnels-et-decimaux-dans-la-scolarite-obligatoire-1987-2/

BROUSSEAU, G., CENTENO J.,(1991).Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 11/2.3, 167-210.

BRUINS, M. (1992). The construction of numerical tables in Mesopotamia. P.BENOIT, J.RITTER& CHEMLA,K *(eds) Histoire des fractions, fractions d'histoires pp77-80 .* Basel-Boston-Berlin : Bikhauser Verlag.

BUISSON, F. (1911). Le dictionnaire de la pédagogie. Paris : Hachette.

BURDEAU, G.(1956). La démocratie. Paris : le Seuil.

BUTLEN D., PELTIER M.L. & PEZARD M. (2002) Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions, *Revue Française de Pédagogie n°140*, 41-52, Paris.

BUTLEN, D. & CHARLES-PEZARD, M. (2003) Etapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques*. Recherches en didactiques des mathématiques*, 23/1, 41-78.

BUTLEN, D., MASSELOT, P. & PEZARD,M.(2004). Illustration des i-genres de pratiques et des recompositions singulières. In PELTIER, M-L. (Ed) *Dur, dur, dur d'enseigner en ZEP* Chapitre 3, 83-99 Grenoble : la Pensée Sauvage.

CASSINET, J.(1992). Only yesterday. In, P.BENOIT, J.RITTER& CHEMLA, K (eds) *Histoire des fractions, fractions d'histoires* pp339-341. Basel-Boston-Berlin : Bikhauser Verlag

CAVEING, M. (1992). The arithmetic status of the Egyptian quantième P.BENOIT, J.RITTER& CHEMLA, K (eds) *Histoire des fractions, fractions d'histoires* pp40-53. Basel-Boston-Berlin : Bikhauser Verlag

CHARLES-PEZARD, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 30-2**,** 197-261.

BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M., MASSELOT P. (2012). *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble France : La pensée Sauvage.

CHEMLA, K.(1992).Les fractions comme modèle formel en Chine ancienne, in P.BENOIT, J.RITTER& CHEMLA,K *(eds)Histoire des fractions, fractions d'histoires pp191-209 .* Basel-Boston-Berlin :Bikhauser Verlag.

CHESNE, J-F (1997). Du partage du cycle 3 au quotient de la sixième. http://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/dupartageauquotient.pdf (consulté le 25/09/2015)

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique.* Grenoble : La pensée sauvage éditions.

COULANGE, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM, in Rochex, J-Y et Crinon,J.(dir) *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement,* 33-34. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

COULANGE, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot, 136 pages.

CYRULNIK, B. (2014). *Les âmes blessées.* Paris : Odile Jacob

DE VECCHI, G.(2007). *Faire vivre de véritables situations-problèmes*. Paris : Hachette Education.

DESGAGNE, S. & BEDNARZ,N.(2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche « avec » plutôt que « sur » les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*, 31(2), 245-258.

DJEBBAR, A. (1992). The treatment of fractions in the Arab mathematical tradition of the Maghreb. In, P.BENOIT, J.RITTER& CHEMLA, K (eds) *Histoire des fractions, fractions d'histoires* pp223-247. Basel-Boston-Berlin : Bikhauser Verlag

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7-2, 5-31.

DOUADY, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem, 6,132-158.*

DOUADY, R. &PERRIN-GLORIAN, M-J(1986). Liaison école-collège : Nombres décimaux. Brochure 62. Paris : IREM de Paris VII

FABRE, M. (2007). Des savoirs scolaires sans problèmes et sans enjeux. La faute à qui *?, Revue français de pédagogie [En ligne],* 161, 69-78. *https://rfp.**revue**s.org/pdf/823.(consulté* le 24/09/2015)

FORGET, A. (2011).*Importer le concept d'institutionnalisation en classe de français : quatre classes aux prises avec une même séquence didactique sur le genre encyclopédique en cinquième année primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. 307 pages.

FRIDMAN-BITTENCOURT, J. (2008). *Analyse didactique comparée des rapports à l'enseigner*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.470 pages.
http://thesesups.ups-tlse.fr/467/1/Fridman-Bittencourt.pdf

GLASSNER, J-J. (1992).Du bon usage des fractions. In P.BENOIT, J.RITTER& CHEMLA, K *(eds)Histoire des fractions, fractions d'histoires pp115-127 .* Basel-Boston-Berlin : Bikhauser Verlag

HERSANT, M.(2004) Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 4(2),241-258.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00450482 *(consulté le 25/09/2015)*

JOIGNEAUX C, LAPARRA M & MARGOLINAS C.(2012) Une dimension cachée du curriculum réel de l'école maternelle : La littératie émergente? Colloque Sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières, 13-14 Septembre 2012,Lausanne.
https://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00738656/document (consulté le 24/09/2015)

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport à la psychologie cognitive à l'enseignement.* Rennes : Presses Universitaires de France.

LAMON, S. (2008).*Teaching fractions and rations for understanding : essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New-York: Psychology Press.

LEPOCHE, G. & BARILLY (2012).Les nombres décimaux et les fractions. Le nombre en cycle 3. Poitiers: SCEREN

LEUNG, I. K.C. & CARBONE, E. R. (2013). Pre-service Teachers' Knowledge about Fraction Divisions Reflected Through Problem Posing. *The Mathematics Educator*, 14(1&2), 80-92.

LEUNG, I. K. C. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division, *ZDM-International Journal on Mathematics Education*.

MARGOLINAS, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 113-158

MARGOLINAS, C & LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire in Rochex, J-Y et Crinon,J.(dir) *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement,* 19-33. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

MARGOLINAS, C. (2012). Des savoirs à l'école maternelle. Oui mais lesquels. *Acte du 39e colloque de la Copirelem.*20-21-22 Juin, Quimper.

MARGOLINAS, C. LAPPARA, M.(2008). Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation : des effets de la transparence des objets du savoir.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779656/document

MARGOLINAS, C. (2014).Connaissances et savoirs. Concepts didactiques et perspectives sociologiques, *Revue Française de Pédagogie, 1*88, 13-22.

MASSELOT, P. & ROBERT, A. (2007). Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de professeurs enseignant les mathématiques, *Recherche et formation* 56, 15-32.
http://rechercheformation.revues.org/841

MAZARS, G. (1992). Les fractions dans l'Inde ancienne de la civilisation de l'Indus à Mahavira (9ième siècle). in P.BENOIT, J.RITTER& CHEMLA,K *(eds)Histoire des fractions, fractions d'histoires pp209-220*. Basel-Boston-Berlin : Bikhauser Verlag.

MICHEL, C. (1992). Les fractions dans les tablettes économiques du début du second millénaire en Assyrie et en Babylonie. In P. Benoit, K. Chemla et J. Ritter (éds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, p. 87-101. Basel-Boston-Berlin : Bikhauser Verlag

MOUNIER, E. (2013). Y-a-t-il des marges de manœuvres pour piloter la classe pendant les phases de bouclages ? *Recherche en didactiques des mathématiques* 33/1.79-113

NEYRET, R. (1995). *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les IUFM*. Doctorat. Université de Grenoble.

OURY,F & VASQUEZ, A.(1967).*Vers une pédagogie Institutionnelle.* Paris : François Maspero.

OURY, F. & VASQUEZ, A. (1974). *De la Classe Coopérative à la Pédagogie Institutionnelle.* Paris : Maspéro.

OURY, F & VASQUEZ, A. *(1998). Vers une pédagogie Institutionnelle.* Vigneux : Matrice, p 246.

PARRAT-DAYAN, S. &, VONECHE, J. (1991). Conservation, notions et pratiques cognitives étude de leurs interrelations. Bideaud, J.Meljac,C. Fischer, J-C (Eds). *Les chemins du nombre*. Lille : Presses Universitaires de Lille.

PERRIN-GLORIAN, M.J.(1986).*Représentations des fractions et des décimaux chez des élèves de CM2 et du colllège*. Cahier de didactique des mathématiques 24.
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_cahiers_de_didactique/#blanc consulté le 09/09/2015

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1993a).Questions de didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des « classes faibles ». *Recherches en didactiques des mathématiques,* 13/1.2, 95-118

PERRIN-GLORIAN, M.J (1993b). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprennent les classes faibles*. Petit X, n°35 5-40.*

PERRIN, D. (2005). *Mathématiques d'école : nombres, géométrie et mesures*. Paris : Cassini

PIAGET, J. &INHELDER, B (1966). *La psychologie de l'enfant*. PARIS : P.U.F, collection Que sais-je ? n°369.

PITKETHLY, A. &HUNTING,R.(1996).A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathématics.* 30,5-38.

PROULX, J.(2013). Réflexions épistémologiques sur la recherche collaborative en didactique : possibilités et excès, In Bednarz, N.(dir), *Recherche collaborative et pratiques enseignantes*,pp327-349. Paris: L'harmattan.

ROBERT, A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactiques des mathématiques*, 18/2, 139-190

ROBERT, A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier. *Recherches en didactiques des mathématiques* 21/12, 57-80.

ROBERT, A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse des inférences en formation, *Recherches en didactique des mathématiques* 27/3, 271-312.

ROBERT, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques, dans La classe de mathématiques, in Vandebrouck F. (Éd) A*ctivités des élèves et pratiques des enseignants*, Partie I, 95-68.Toulouse : Octarès Éditions.

ROBERT, A & POUYANNE, N. (2005) Former des formateurs d'enseignants de mathématiques, *la gazette des mathématiciens* 103, 101-114

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématique : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

ROBERT, A. & VANDEBROUCK, F. (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 34 (2/3), 239-285.

SENSEVY, G. (1996) Le temps didactique et la durée de l'élève : étude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques 16/1, 7-46.*

SCHON, D.A. (1983). *The reflective practitioner : how professionals think in action*. New York : Basic Books. (Reprinted in 1995).

SIEGLER, R.S et al (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychol. Sci*.23,691-697

TEMPIER, F. (2013). *L'enseignement de la numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de Doctorat, Université de Paris Diderot, Paris.426 pages.

THOMAZET & MARGOLINAS (2005). Différencier au sein du groupe clase : une analyse des pratiques des maitres experts. *Acte du 73ième congrès de l'ACFAS, Innovations durables*, May 2005, Chicoutimi, Canada.

TOURNAY, V .(2011). *Sociologie des institutions.* Presses universitaires de France : Que sais-je ?, Paris.

VAN DE WALLE, J.A. (2010). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally (Seventh edition).* Boston : Pearson Education

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactiques des mathématiques*, 10/23, 133-170.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, New York: Academic Press., pp. 127-174

VIVIER, L.(2014). *Sur la route des réels, point de vue sémiotique praxéologique, mathématique.* Habilitation à diriger les recherches. Université de Paris Diderot : Paris. 105 pages.

WEIL-BARAIS, A.(2005). *L'homme cognitif*. Paris : Presses Universitaires de France.

Articles du RNP mis en ligne : http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/bib_alpha.html

BEHR, M., HAREL, G., POST, T., LESH, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and* Learning (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

BEHR, M.J., HAREL, G., POST, T & LESH, R. (1993). Rational Numbers: Towards a Semantic Analysis - Emphasis on the Operator Construct.' In T.P.CARPENTER, E.FENEMMA and T.A. ROMBERG (eds.), *Rational Numbers: An Integration of the Research* (pp 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

CARPENTER, T.P., FENEMMA, E. & ROMBERG, T.A. (1993) Toward a Unified Discipline of Scientific Inquiry.' In T.P.CARPENTER, E.FENNEMA and T.A.ROMBERG (eds.), Rational Numbers: *An Integration of the Research* (pp 1-11).Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

KIEREN, T.E. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers.' In R. LESH (ed.), *Number and Measurement* (pp 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

KIEREN, T.E. (1980) The rational number construct – Its elements and mechanisms. In T.E. KIEREN (ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp 125-150). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

KIEREN, T.E. (1993) Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In T.P.CARPENTER, E.FENNEMA and T.A.ROMBERG (eds.), *Rational Numbers: An Integration of the Research* (pp 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Les ouvrages scolaires :

ERMEL (1982) Apprentissages numériques et Résolution de problèmes CM1. Paris : Hatier
ERMEL (1997) Apprentissages numériques et Résolution de problèmes CM2. Paris : Hatier
ERMEL (1997) Apprentissages numériques et Résolution de problèmes CM1. Paris : Hatier
CHARNAY, R. et al (2003) Cap Maths, manuel de l'élève CM1. Paris : Hatier.
CHARNAY, R. et al (2003) Cap Maths, manuel de l'élève CM2. Paris : Hatier.
CHARNAY, R. et al (2003) Cap Maths guide du maître. CM1.Paris : Hatier
CHARNAY, R. et al (2003) Cap Maths guide du maître. CM2.Paris : Hatier
CHARNAY, R. et al (2003) Cap Maths « dico maths ». CM1.Paris : Hatier
CHARNAY, R. et al (2003) Cap Maths « dico maths ». CM2.Paris : Hatier
CHESNE et al (2009). Hélice 6ième . Paris : Didier

PELTIER, M-L et al (2008) Euro Maths. CM2. Paris : Hatier.
PELTIER, M-L et al (2008) Mémo maths. CM2. Paris : Hatier.

Textes des programmes, documents d'applications.

BOMPART, M. (1963). *Enseignement de l'arithmétique. Le calcul au cours moyen, cahiers de pédagogique moderne*. Paris : collection Bourrelier, Armand Colin.
MEN(2002) Programmes de l'école primaire : BO Hors série n°1 du 14 Février 2002.
MEN(2002) Documents d'application des programmes : mathématiques, cycle des approfondissements (cycle3), Ministère de l'Education Nationale de L'Enseignement Supérieur et de la recherche, Direction de l'enseignement scolaire, CNDP, 2002.
MEN(2007) Programmes de l'école primaire : BO Hors série n°5 du 12 avril 2007.
MEN(2008) Programmes de l'école primaire : BO Hors série n°3 du 19 Juin 2008.

Sitographie pour la lecture des programmes anciens.

http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_primaire1882.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_1923.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_1938.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_primaire1945.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Devoirs.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Francais_calcul1960.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_1970.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_1980.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_1985.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_1991.pdf
http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_1995.pdf